

|       |         |         |
|-------|---------|---------|
| Naam: | St.nr.: | Versie: |
|-------|---------|---------|

tentamen Calculus / Analyse (deel 1 / 2) – wi 1 105 TI / wi 1 100 TI

(geef op je werk duidelijk aan welk tentamen (*vakcode*) je wilt doen<sup>1</sup>)

4 november 2013, 09.00–11.00 uur

*Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.  
 Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.*

### KORTANTWOORDVRAGEN

*Op de volgende vragen volstaat een kort antwoord; argumentatie wordt niet gevraagd.*

*Je mag hierbij alleen het **formuleblad** van het instellingspakket gebruiken.*

*Gebruik van rekenmachines, boeken en aantekeningen is **niet** toegestaan.*

*Zodra je dit vel hebt ingeleverd mag je je rekenmachine gebruiken.*

- 6 B 1. Bepaal de afgeleide naar  $x$  van  $\arctan(2 \sin x)$ .

$$\frac{2 \cos x}{1 + 4 \sin^2 x}$$

- 6 BD 2. Differentieer de vergelijking ( $y$  als functie van  $x$ )

$$\frac{x^3}{y^2} - \sqrt{xy} = 2$$

impliciet naar  $x$  (*niet uitwerken*).

$$\frac{3x^2}{y^2} - 2\frac{x^3}{y^3}y' - \frac{1}{2\sqrt{xy}}(y + xy') = 0$$

- 6 B 3. Door substitutie van  $u = \sin x$  gaat de integraal

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\sin(x)}}{\cos(x)} dx \quad \text{over in (niet uitrekenen!)}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \frac{e^u}{1-u^2} du$$



<sup>1</sup>A = nieuw, B = oud, deel 1, C = oud, deel 2, D = oud, deel 1+2

- 6 ABD 4. Bij het zoeken naar een particuliere oplossing van

$$y'' - 3y' - 4y = (2x + 1)e^x$$

bepaal je de coëfficiënten in (geef de vorm van  $y_p$ )

$$y_p = (ax + b)e^x$$

Er staat een tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten. De karakteristieke vergelijking luidt  $r^2 - 3r - 4 = 0$  en heeft de oplossingen 4 en  $-1$ . De gereduceerde vergelijking heeft dus als algemene oplossing  $y_r = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$ .

Er is dus geen modificatie nodig; we kiezen  $y_p = (ax + b)e^x$ .

17.2

- 6 C 5. Gegeven is de rij met elementen  $a_n = n \cos \frac{1}{n}$ .

Is deze rij dalend, stijgend of geen van beide?

Is deze rij begrensd / alleen naar boven / alleen naar beneden begrensd / niet begrensd?

Let op: twee antwoorden gevraagd.

stijgend  
beneden begrensd

Zowel  $\frac{1}{n}$  als  $\cos$  zijn dalend (op het beschouwde interval) en positief, en daardoor is  $\cos \frac{1}{n}$  stijgend; ook  $n$  is stijgend, en dus is  $a_n = n \cos \frac{1}{n}$  eveneens (strikt) stijgend.

Daar  $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$  is  $a_n = n \cos \frac{1}{n} > 0$  en is de rij naar beneden begrensd. De rij is niet naar boven begrensd, omdat  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cos \frac{1}{n} = \infty \cdot \cos 0 = \infty \cdot 1 = \infty$ .

11.1

- 6 ACD 6. Geef van de convergente meetkundige reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2 \cdot 5^{n+1}}{2^{3n+1}}$$
 de reden  $r$  en de som  $s$ :

$$r = \frac{5}{8}$$

$$s = \frac{-40}{3}$$

De eerste term van de reeks is (vul  $n = 0$  in)  $-2 \cdot \frac{5}{2} = -5$ . Om de volgende term van de reeks te verkrijgen wordt de teller steeds met 5 en de noemer met  $2^3$  vermenigvuldigd; de reden is aldus  $\frac{5}{8}$  (en de reeks is dus inderdaad convergent).

De reeks in standaardvorm luidt  $\sum_{n=0}^{\infty} -5 \left(\frac{5}{8}\right)^n$ . De som van de reeks is dus  $\frac{-5}{1-\frac{5}{8}} = \frac{-40}{3}$ .

11.2

reeks alternerend

$$\frac{2n}{1+n^2} \text{ dalend}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+n^2} = 0$$

- 6 AC 7. De reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{1+n^2}$  is convergent; om dit aan te tonen kan het kenmerk van Leibniz (*alternating series test*) worden toegepast. Welke voorwaarden moeten worden gecontroleerd?

- 6 ACD 8. Bepaal de linearisering van  $F$  in  $P = (1, 2)$  als  $F(x, y) = 3x^2y$ .

$$L(x, y) = 6 + 12(x - 1) + 3(y - 2)$$

Voorzie elk antwoord van een deugdelijke argumentatie en geef exacte antwoorden.

Je mag hierbij alleen het **formuleblad** van het instellingspakket en een **rekenmachine** gebruiken.

Onderling contact en het gebruik van communicatieapparatuur zijn **niet** toegestaan.

Per vraag, meestal per onderdeel, is vermeld tot welke versie van het tentamen de vraag of het betreffende onderdeel behoort; hierbij zijn de versies als volgt gecodeerd:

**A = wi 1 105 TI (nieuw)** 5, 6, 9, 10, 11, 12

**B = wi 1 100 TI (oud), deel 1** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

**C = wi 1 100 TI (oud), deel 2** 8, 9, 10, 11, 12

**D = wi 1 100 TI (oud), deel 1 en deel 2** 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12

- 8 BD 1. Bepaal met behulp van een geschikte linearisering een benadering van  $\frac{1}{\sqrt{1,04}}$ .

Laat  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  en  $a = 1$ . We lineariseren  $f$  in  $a$  en hebben  $f(a)$  en  $f'(a)$  nodig:  
 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \implies f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \implies f(1) = 1$  en  $f'(1) = -\frac{1}{2}$ .  
 De bedoelde linearisering is  $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}(3 - x)$ , en  
 $\frac{1}{\sqrt{1,04}} = f(1,04) \approx L(1,04) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,04 = 0,98$ . § 3.10

- 10 B 2. Bereken  $\int x^2 \arcsin x \, dx$ .

*Aanwijzing:* pas partiële integratie toe, en vervolg met een geschikte substitutie.

We passen een partiële integratie toe om van de arcsin verlost te worden en vervolgens een substitutie om de wortel onschadelijk te maken:

$$\int \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{\arcsin x}_v \, dx = \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_u \cdot \underbrace{\arcsin x}_v - \int \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{v'} \, dx \quad \left[ \begin{array}{l} w = 1 - x^2 \\ dw = -2x \, dx \\ x^2 = 1 - w \end{array} \right] =$$

$$\frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \int -\frac{1}{6} \frac{1-w}{\sqrt{w}} \, dw = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x + \frac{1}{6} \int \left( \frac{1}{\sqrt{w}} - \sqrt{w} \right) \, dw =$$

$$\frac{1}{3}x^3 \arcsin x + \frac{1}{6} \left( 2\sqrt{w} - \frac{2}{3}w^{\frac{3}{2}} \right) + C = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$
 § 5.5 / § 7.1

- 10 BD 3. Bereken, indien mogelijk,  $\int_0^1 \frac{1}{2-3x} \, dx$ .

De integraal is oneigenlijk in  $\frac{2}{3}$ ; splitsen geeft:  $\int_0^1 \frac{1}{2-3x} \, dx = \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{2-3x} \, dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{1}{2-3x} \, dx$ .

Voor elk van beide termen hebben we een limietproces nodig; naar blijkt zijn de primitieven  $\int \frac{1}{2-3x} \, dx = -\frac{1}{3} \ln |2-3x| + C$  onbegrensd in de buurt van  $\frac{2}{3}$ . Beide limieten bestaan dus niet in eigenlijke zin en bijgevolg zijn beide termen divergent; zo is bijvoorbeeld

$$\lim_{b \rightarrow \frac{2}{3}^-} \int_0^b \frac{1}{2-3x} \, dx = \lim_{b \rightarrow \frac{2}{3}^-} -\frac{1}{3} \ln(2-3b) = \infty$$

De gevraagde integraal is dus *divergent*. § 7.8

10 B 4. Geef de algemene oplossing van  $y' = 4xy$ .

De gegeven differentiaalvergelijking is separabel; we scheiden eerst de veranderlijken:  
 $y' = 4xy \xrightarrow{y \neq 0} \frac{y'}{y} = 4x$ , en primitiveren vervolgens beide leden:  
 $\int \frac{dy}{y} = \int 4x \, dx \iff \ln|y| = 2x^2 + C_0 \iff y = Ce^{2x^2}$  met de constante  $C$  willekeurig. 9.3

10 A<sup>2</sup>BD 5. Los het volgende beginwaardeprobleem op:

$$xy' - 2y = x^4 \quad \text{met} \quad y(2) = 0.$$

De differentiaalvergelijking is lineair; in standaardgedaante (deel door  $x$ ):  
 $y' - \frac{2}{x}y = x^3 \implies P(x) = -\frac{2}{x}$  en  $Q(x) = x^3$  (notatie boek).  
 Integrerende factor:  $I(x) = \exp\left(\int P(x) \, dx\right) = \exp\left(\int -\frac{2}{x} \, dx\right) = \exp(-2 \ln|x|) = \frac{1}{x^2}$ .  
 Oplossing:  $y(x) = \frac{1}{I(x)} \int I(x)Q(x) \, dx = x^2 \int \left(\frac{1}{x^2} \cdot x^3\right) \, dx = x^2 \int x \, dx = \frac{1}{2}x^4 + Cx^2$ .  
 Integratieconstante: invullen van  $x = 2$  levert  $y = 0$  op, dus  $8 + 4C = 0 \iff C = -2$ .  
 We vinden dus:  $y(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$ . §9.5

8 ABD 6. Vereenvoudig zo veel mogelijk:

$$\frac{2e^{-\frac{\pi}{3}i} + 1 + i\sqrt{3}}{1 + i}.$$

$$\frac{2e^{-\frac{\pi}{3}i} + 1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right) + (1 - i\sqrt{3})}{1 + i} =$$

$$\frac{2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) + 1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{2 - 2\sqrt{3} - 2i - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} + i(-1 - \sqrt{3}).$$

App. H

10 <sup>2</sup>BD 7. Geef de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijking:

$$4y'' - 12y' + 9y = 3\cos x + 28\sin x.$$

We herkennen een tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.  
 De karakteristieke vergelijking  $4r^2 - 12r + 9 = 0$  heeft de dubbele wortel  $r = \frac{3}{2}$ .  
 De gereduceerde (of homogene) oplossing is dus:  $y_r(x) = C_1e^{\frac{3}{2}x} + C_2xe^{\frac{3}{2}x}$ .  
 Het rechterlid is van de behandelde speciale gedaante en modificatie is niet nodig.  
 Stel daarom  $y_p = a\sin x + b\cos x \implies y_p' = a\cos x - b\sin x \implies y_p'' = -a\sin x - b\cos x$ .  
 Invullen in de niet-gereduceerde vergelijking leert dat onderling overeen moeten komen:  
 $-4a\sin x - 4b\cos x + 12a\cos x - 12b\sin x + 9a\sin x + 9b\cos x = 3\cos x + 28\sin x$ ;  
 er moet dus gelden dat (vergelijkingen voor de coëfficiënten van  $\sin x$  en  $\cos x$ )  
 $5a - 12b = 28$  en  $12a + 5b = 3$ ; hieraan wordt voldaan door  $a = \frac{8}{13}$  en  $b = \frac{27}{13}$ .  
 De algemene oplossing luidt:  $y_a(x) = y_p(x) + y_r(x) = \frac{8}{13}\sin x + \frac{27}{13}\cos x + C_1e^{\frac{3}{2}x} + C_2xe^{\frac{3}{2}x}$ .  
17.2



<sup>2</sup>Tijdens het tentamen is besloten bij versie A studenten de keuze te laten som 5 of som 7 te maken

8. Een rij (*sequence*)  $(a_n)_{n=0}^\infty$  (notatie boek:  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ ) wordt recursief gegeven door

$$a_{n+1} = \frac{2}{3} \left( a_n + \frac{1}{a_n^2} \right) \quad \text{met} \quad a_0 = 1.$$

- 4 C a) De rij is convergent (dit behoeft je niet aan te tonen). We noemen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .  
Leg uit dat  $L$  moet voldoen aan de vergelijking  $L = \frac{2}{3} \left( L + \frac{1}{L^2} \right)$ ; bereken  $L$ .  
Gebruik hierbij rekenregels voor limieten (welke?) en  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Er geldt, mits de gebruikte limieten bestaan en niet 0 zijn:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left( a_n + \frac{1}{a_n^2} \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n + \frac{1}{a_n^2} \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{2}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n^2} \right) \stackrel{(3)}{=} \frac{2}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \frac{1}{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^2} \right) = \frac{2}{3} \left( L + \frac{1}{L^2} \right). \end{aligned}$$

Verantwoording van de gemaakte stappen:

*Ad (1):*  $\lim k a_n = k \lim a_n$

*Ad (2):*  $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

*Ad (3):*  $\lim a_n^k = (\lim a_n)^k$

Nu moeten we  $L \in \mathbb{R}$  nog uitrekenen:

$$L = \frac{2}{3} \left( L + \frac{1}{L^2} \right) \iff \frac{1}{3}L = \frac{2}{3} \frac{1}{L^2} \iff L^3 = 2; \text{ we concluderen dat } L = \sqrt[3]{2}.$$

11.1

- 4 C b) Toon aan dat, als  $a_n > L$ , er geldt dat  $a_{n+1} < a_n$ .

$$\text{Bekijk } a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3} \left( a_n + \frac{1}{a_n^2} \right) - a_n = \frac{1}{3} \left( -a_n + 2 \frac{1}{a_n^2} \right).$$

Beschouw  $f(x) = -x + \frac{2}{x^2} \implies f'(x) = -1 - \frac{4}{x^3} < 0$ . Deze functie, en dus ook  $a_{n+1} - a_n$  daalt; daar  $f(L) = 0$  is  $f(x)$ , en dus ook  $a_{n+1} - a_n < 0$  voor  $a_n > L$ .

[of:]  $\text{Bekijk } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{3} \left( a_n + \frac{1}{a_n^2} \right)}{a_n} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{a_n^3} \right).$

Beschouw  $g(x) = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right) \implies g'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{x^4} < 0$ . Deze functie, en dus ook  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  daalt; daar  $g(x) = 1$  is  $g(x)$ , en dus ook  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  voor  $a_n > L$ .

In beide gevallen is de conclusie:  $a_{n+1} < a_n$  als  $a_n > L$ .

11.1

- 8 C c) Gebruik dit en de monotone-convergentiestelling om aan te tonen dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  bestaat (pas volledige inductie (*mathematical induction*) toe vanaf  $n = 1$ ).

De rij  $(a_n)$  is naar beneden begrensd met ondergrens 0.

Daarnaast is de rij voor  $n \geq 1$  dalend. Dat trachten we aan te tonen met behulp van volledige inductie naar  $n$ .

**BASIS:**  $n = 1$ :  $a_1 = \frac{2}{3} \left( a_0 + \frac{1}{a_0^2} \right) = \frac{4}{3} > \sqrt[3]{2} = L$  (want  $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} > 2$ ).

Uit het vorige onderdeel volgt nu dat  $a_2 < a_1$ .

**STEL:**  $a_n < a_{n-1}$  voor een  $n \geq 1$ .

**STAP:**  $n \rightarrow n + 1$ : we moeten nu bewijzen dat ook geldt:  $a_{n+1} < a_n$ ; dat volgt uit het vorige onderdeel, mits we weten dat ook  $a_n > L$ ; dat tonen we niet aan.<sup>a</sup>

**DUS:**  $n \rightarrow \infty$ : met volledige inductie blijkt nu dat  $a_n + 1 - a_n < 0$  voor  $n \geq 1$ ; de conclusie luidt dat de rij daalt vanaf  $n = 1$  (niet vanaf  $n = 0$ !).

Omdat de rij naar beneden begrensd en (op den duur) dalend is heeft zij een limiet, op grond van de monotone-convergentiestelling.

11.1

<sup>a</sup>het bewijs blijkt veel te lastig te zijn om tijdens een tentamen te geven; ik heb 4 punten uit de normering weggehaald; eventuele deelscores worden meegeteld

10 ACD 9. Bepaal de convergentiestraal  $R$  en het convergentie-interval  $I$  van de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2^n}{n} (x-3)^n.$$

We gebruiken het verhoudingskenmerk van D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{-2^{n+1}}{n+1} (x-3)^{n+1}}{\frac{-2^n}{n} (x-3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{n}{n+1} \cdot |x-3| = 2|x-3| = 1 \text{ als } |x-3| = \frac{1}{2}.$$

Het middelpunt van het convergentie-interval is dus 3 en de convergentiestraal  $R = \frac{1}{2}$ .  $I$  heeft als randpunten  $\frac{5}{2}$  en  $\frac{7}{2}$ . Daar gaan we randonderzoek in doen.

**rand**  $\frac{5}{2}$ : invullen van  $x = \frac{5}{2}$  geeft de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ ; dat is de, (relatief) convergente, alternerende harmonische reeks; en

**rand**  $\frac{7}{2}$ : invullen van  $x = \frac{7}{2}$  geeft de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ ; dat is het tegengestelde van de, divergente, harmonische reeks.

We stellen vast dat  $I = [\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ .

11.8

10 ACD 10. Bepaal *met behulp van reeksontwikkelingen*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + e^x - 2\sqrt{1+x}}{x \sin x}.$$

Van de functies in teller en noemer is de Maclaurinontwikkeling voorhanden:

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
- $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{3!}x^3 + \dots$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

We hebben de termen tot en met die voor  $x^2$  nodig:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + e^x - 2\sqrt{1+x}}{x \sin x} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)) + (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)) - 2(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3))}{x(x + O(x^3))} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+1-2) + (1-1)x + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})x^2 + O(x^3)}{x^2 + O(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^2 + O(x^3)}{x^2 + O(x^3)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} + O(x)}{1 + O(x)} &= \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

11.10

11. Gegeven is de functie  $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  met functievoorschrift  $f(x, y) = x^2 e^{-\sqrt{x+y}}$ .

4 ACD a) Bepaal het grootste mogelijke domein  $D$  van  $f$ .

De enige beperking voor het bestaan van de functiewaarde is dat het argument van de wortel niet negatief mag zijn. Daarmee is de gezochte  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 0\}$ .

14.1



- 8 ACD b) Bereken de partiële afgeleiden  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \cdot e^{-\sqrt{x+y}} + x^2 \cdot e^{-\sqrt{x+y}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( -(x+y)^{\frac{1}{2}} \right) = \left( 2x - \frac{x^2}{2\sqrt{x+y}} \right) e^{-\sqrt{x+y}}; \\ \bullet \quad \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \cdot e^{-\sqrt{x+y}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( -(x+y)^{\frac{1}{2}} \right) = -\frac{x^2}{2\sqrt{x+y}} e^{-\sqrt{x+y}}; \text{ en} \\ \bullet \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x^2}{2\sqrt{x+y}} \right) \cdot e^{-\sqrt{x+y}} + -\frac{x^2}{2\sqrt{x+y}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-\sqrt{x+y}} \right) = \\ &= -\frac{2\sqrt{x+y} \cdot 2x - x^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} (x+y)^{-\frac{1}{2}}}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}} e^{-\sqrt{x+y}} - \frac{x^2}{2\sqrt{x+y}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x+y}} e^{-\sqrt{x+y}} = \\ &= \frac{-4x^2 - 4xy + x^2 + x^2\sqrt{x+y}}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}} e^{-\sqrt{x+y}}. \end{aligned}$$

14.3

12.  $D$  is het gebied tussen de krommen  $y = x^2$  en  $y = \sqrt{x}$ .

- 2 ACD a) Schets  $D$ .

*Volgt later.  $D$  ligt tussen twee parabolen die elkaar in  $(0,0)$  en  $(1,1)$  snijden.* 14.1

- 8 ACD b) Schrijf  $\iint_D (xy - y^3) \, dA$  als herhaalde (*iterated*) integraal.

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

Beide beschrijvingswijzen leiden tot een herhaalde integraal:

$$\iint_D (xy - y^3) \, dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (xy - y^3) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (xy - y^3) \, dx \, dy.^a$$

14.3

<sup>a</sup>een van beide geven volstaat

- 8 ACD c) Bereken  $\iint_D (xy - y^3) \, dA$ .

We kiezen arbitrair de als eerste gepresenteerde herhaalde integraal:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (xy - y^3) \, dy \, dx &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{4}y^4 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{4}x^8 \right) dx = \\ &= \left[ \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{36}x^9 \right]_0^1 = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

14.3

### Normering

*Elk onderdeel levert maximaal het in de kantlijn vermelde aantal punten.*

*Als  $n$  het totale aantal gescoorde punten is ( $0 \leq n \leq 90$ ) geldt:*

**A: voor wi 1 105 TI** is de bijdrage tot het eindcijfer  $c_2 = \frac{n}{15}$ ;

**B: voor wi 1 100 TI — deel 1** is het cijfer gelijk aan  $c = 1 + \frac{n}{10}$  (afgerond,  $1 \leq c \leq 10$ )

**C: voor wi 1 100 TI — deel 2** als  $q$  het resultaat van de laatste twee quizzen ( $0 \leq q \leq 50$ ) is is het cijfer gelijk aan  $c = 1 + \frac{n}{10} + \frac{q}{50}$  (afgerond,  $1 \leq c \leq 10$ )

**D: voor wi 1 100 TI — deel 1 & 2** worden twee aparte cijfers gegeven voor de beide delen; voor het tweede deel telt het resultaat mee van de laatste twee quizzen ( $0 \leq q \leq 50$ ).