

Tentamen Redeneren en Logica

11 december 2013

Instructies

- Het gebruik van dictaat, aantekeningen, rekenmachines of andere bronnen is **niet toegestaan**.
- Alle meerkeuzevragen wegen even zwaar. Alle open vragen wegen even zwaar.

Veel succes!

Meerkeuzevragen

1. Beschouw de volgende recurrente betrekking met randvoorwaarde.

$$\begin{aligned} f(p_i) &= 0 & i \in \mathbb{N} \\ f(\neg A) &= f(A) + 1 & \text{voor alle } A \in PROP \\ f((A \star B)) &= f(A) + f(B) + 1 & \text{voor alle } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

Welke waarde kent de hierboven gedefinieerde functie f toe aan elke formule $F \in PROP$?

- A. het aantal voorkomens van connectieven in F .
- B. het aantal voorkomens van propositievariabelen in F .
- C. het aantal symbolen in F .
- D. het aantal echte subformules van F .

2. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. $(p \rightarrow \neg q) \therefore (p \wedge \neg q)$.

Deze redenering is niet geldig. Voor welke van de onderstaande formules geldt dat de redenering geldig wordt wanneer de formule als premisse aan de redenering wordt toegevoegd?

- A. De formule p .
 - B. De formule $(p \vee q)$.
 - C. De formule q .
 - D. De formule $(p \rightarrow q)$.
3. Beschouw de volgende formule $F = \neg((\neg p_6 \rightarrow p_0) \rightarrow \neg p_3)$. Welke van de volgende expressies drukt de waarheidswaarde van deze formule uit als functie van de waarheidswaarden van de propositievariabelen?
- A. $v(F) = 1 - \max(1 - \max(1 - v(p_6), v(p_0)), 1 - v(p_3))$
 - B. $v(F) = \max(1 - \max(1 - (1 - v(p_6)), v(p_0)), 1 - v(p_3)) - 1$
 - C. $v(F) = 1 - \max(1 - \max(v(p_6), v(p_0)), 1 - v(p_3))$
 - D. $v(F) = \max(1 - \max(1 - v(p_6), v(p_0)), 1 - v(p_3)) - 1$
4. Beschouw de volgende uitspraak.

Redenering. Voor alle formules $A, B \in PROP$ geldt: Als A en B vervulbaar zijn, is $\{A, B\}$ vervulbaar.

Deze redenering is niet geldig. Welk paar formules vormt een tegenvoorbeeld?

- A. $A = (p \rightarrow q)$ en $B = (q \rightarrow p)$.
- B. $A = (p \vee q)$ en $B = \neg(p \wedge q)$.
- C. $A = p$ en $B = q$.
- D. $A = (p \wedge \neg q)$ en $B = (q \wedge \neg p)$.

5. Beschouw een redenering $\Gamma \therefore C$, waar Γ een verzameling (van nul of meer) formules uit $PROP$ is, en C een formule uit $PROP$. Welke uitspraak is waar?
- A. Als tenminste één van de premissen een tautologie is, is de redenering ongeldig.
 - B. Als geen van de premissen een contradictie is, is de redenering geldig.
 - C. Als C een contradictie is, kan de redenering niet geldig zijn.
 - D. Als de redenering niet geldig is, is geen van de premissen een contradictie.

6. Beschouw de volgende uitspraak.

Redenering. Voor alle formules $A, B \in PROP$ geldt: Als $\models (A \vee B)$, dan ($\models A$ of $\models \neg A$).

Deze redenering is niet geldig. Wat weten we over de formule A in een tegenvoorbeeld?

- A. In een tegenvoorbeeld moet A een tautologie zijn.
 - B. In een tegenvoorbeeld moet A een contingentie zijn.
 - C. In een tegenvoorbeeld moet A een contradictie zijn.
 - D. Geen van bovenstaande is noodzakelijkerwijs waar.
7. Stel dat we een redenering $\Gamma \therefore C$ op logische geldigheid willen onderzoeken. (Γ is een verzameling formules uit $PROP$ en C is een formule uit $PROP$.) We maken voor deze redenering met de boommethode een boom B , en met de resolutiemethode een resolutie-afleiding R . Welke uitspraak is waar?
- A. In B sluiten alle takken desda in R de lege disjunctie kan worden afgeleid.
 - B. Als in B tenminste één tak niet sluit, kan in R de lege disjunctie worden afgeleid.
 - C. Als in R de lege disjunctie kan worden afgeleid, is Γ vervulbaar.
 - D. Als Γ geen formules bevat, kan in R de lege disjunctie worden afgeleid.

Open vragen

1. **(Volledige inductie)** De Fibonacci getallen zijn als volgt gedefinieerd.

$$F(1) = 1$$

$$F(2) = 1$$

$$F(n) = F(n-2) + F(n-1) \quad \text{voor } n \geq 3$$

Dus $F(3) = 1 + 1 = 2$, $F(4) = 1 + 2 = 3$, $F(5) = 2 + 3 = 5$, etc. Beschouw de volgende stelling.

Stelling. Voor alle gehele $n \geq 1$ geldt: $\sum_{i=1}^n F(2i-1) = F(2n)$.

Bijvoorbeeld, voor $n = 3$ is $\sum_{i=1}^3 F(2i-1) = F(2 \cdot 1 - 1) + F(2 \cdot 2 - 1) + F(2 \cdot 3 - 1) = F(1) + F(3) + F(5) = 1 + 2 + 5 = 8$, en dat is inderdaad gelijk aan $F(2 \cdot 3) = F(6) = 8$.

Bewijs de stelling met volledige inductie.

2. **(Geldigheid van redeneringen)** Beschouw de volgende redenering.

Redenering. $((p \wedge q) \rightarrow \neg r), (r \rightarrow q), (p \vee \neg q) \therefore (r \rightarrow \neg(p \rightarrow q))$.

Laat op de volgende drie manieren zien of de redenering geldig is of niet:

- (a) met een waarheidstafel,
- (b) met de boommethode,
- (c) met de resolutiemethode.

Maak in alle drie de gevallen duidelijk hoe je conclusie over de geldigheid van de redenering volgt uit elk van de methodes.