

Tussententamen Lineaire Algebra TW1205TI

11 maart 2015, 09.00 – 11.00 uur

Afgezien van vraag 13 en 14 worden alleen de antwoorden gevraagd; die vul je in op het antwoordvel. Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Normen: opg. 2. en 11. 1 punt, alle andere onderdelen 2 punten.

1. Geef de gereduceerde echelonmatrix bij de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

2. Bereken het product $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Bereken alle h en k waarvoor de vergelijking $\begin{bmatrix} 1 & h \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix}$ strijdig (Eng: *inconsistent*) is.

4. De nulruimte van een 6×8 matrix A heeft dimensie 3. Wat is de dimensie van de kolomruimte van A ? Geef als antwoord NB ('Niet Bekend') als er niet genoeg gegevens zijn.

5. Bereken de determinant van de matrix $\begin{bmatrix} 5 & 9 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

6. Stel $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Aan welke lineaire vergelijking moeten de getallen b_1, b_2 en b_3 voldoen opdat $\mathbf{b}$ in $\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ ligt?

7. Geef de oplossing van het stelsel met de aangevulde matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$ (augmented)

in de vorm $\begin{cases} x_2 = \dots + \dots x_1 + \dots x_3 \\ x_4 = \dots + \dots x_1 + \dots x_3 \\ x_1, x_3 \text{ vrij} \end{cases}$

8. De *lineaire* afbeelding $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ beeldt $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ af op $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, en $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ op $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bereken het beeld (*the image*) van $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ onder T .

Z.O.Z. voor opgaven 9 t/m 15.

9. Bereken de inverse van de matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

10. Vul de matrix in die de aangegeven rijverwisselingen bewerkstelligt:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

11. Stel $A = PDP^{-1}$, met $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dan geldt: $A^{20} =$

a. I ; b. $-I$; c. D ; d. $-D$; e. A ; f. $-A$.

12. Welk van de matrices heeft/hebben dezelfde determinant als $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$?

$$A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{14} & m_{13} & m_{12} \\ m_{21} & m_{24} & m_{23} & m_{22} \\ m_{31} & m_{34} & m_{33} & m_{32} \\ m_{41} & m_{44} & m_{43} & m_{42} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} m_{11} + m_{41} & m_{12} + m_{42} & m_{13} + m_{43} & m_{14} + m_{44} \\ m_{21} + m_{11} & m_{22} + m_{12} & m_{23} + m_{13} & m_{24} + m_{14} \\ m_{31} + m_{21} & m_{32} + m_{22} & m_{33} + m_{23} & m_{34} + m_{24} \\ m_{41} + m_{31} & m_{42} + m_{32} & m_{43} + m_{33} & m_{44} + m_{34} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & -m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & -m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & -m_{33} & m_{34} \\ -m_{41} & -m_{42} & m_{43} & -m_{44} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{21} + m_{22} + m_{23} + m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{31} + m_{32} + m_{33} + m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{41} + m_{42} + m_{43} + m_{44} \end{bmatrix}.$$

13. Stel $A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]$ is een 4×4 matrix, en voor de kolommen geldt $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$.

a. Toon aan dat de nulruimte een dimensie groter dan nul heeft.

b. Ga na of de afbeelding $T(x) = Ax$ surjectief is.

14. Waar of onwaar (voor twee 5×5 matrices):

a. als A inverteerbaar is, dan is $2A$ ook inverteerbaar.

b. als A inverteerbaar is, dan is $A + I$ ook inverteerbaar