

Tentamen TI3300

Complexiteitstheorie

30 juni, 9.00- 12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 10 meerkeuzevragen, 5 korte (open) vragen en 2 open vragen.
- Per meerkeuzevraag kunnen 0 tot 4 alternatieven juist zijn.
- Voor de meerkeuzevragen kunt u maximaal 50 punten behalen, voor de korte open vragen maximaal 30 punten en voor de open vragen maximaal 20 punten.
- Het totaal aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) wordt als volgt bepaald:
 - o per meerkeuzevraag i wordt het aantal foutief beantwoorde alternatieven f_i bepaald (0-4);
 - o de som $f = \sum f_i$ voor alle 10 meerkeuzevragen wordt bepaald ($0 \leq f \leq 40$);
 - o het aantal punten mp is dan gelijk aan $mp = 50 \times \max\{0, (40 - 1.5 \times f) / 40\}$.
- Het eindcijfer c wordt bepaald door de som te nemen van mp , het totaal aantal punten behaald voor de 5 korte vragen kv en de som van het aantal punten behaald voor de twee open vragen ov , en vervolgens het resultaat te delen door 10: $cv = (mv + kv + ov) / 10$; dit cijfer wordt vervolgens afgerond op het dichtstbijzijnde halve of gehele getal.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen, boek of andere bronnen is niet toegestaan.
- Het gebruik van grafische en niet-grafische rekenmachines is eveneens niet toegestaan.
- Beantwoord de meerkeuzevragen op het bijgeleverde antwoordformulier.
- Beantwoord de open vragen zo bondig mogelijk; geef geen irrelevante informatie, dit kan leiden tot puntenaftrek!
- Controleer of u op ieder blaadje uw naam en studienummer heeft vermeld en geef het totaal aantal ingeleverde bladen op (tenminste) de eerste pagina.

Notationele conventies:

- $A \leq B$ betekent dat er een polynomiale-tijd reductie van A naar B bestaat.
- A^c is het complement van het probleem A .
- Er wordt steeds vanuit gegaan, dat $P \neq NP$ en $NP \neq coNP$, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel wordt vermeld.

MEERKEUZEVRAGEN (50 PUNTEN)

Vraag 1. Neem de volgende twee problemen:

- i. Gegeven een graaf $G=(V, E)$ en een integer K , heeft G een vertex cover van ten hoogste K knopen?
- ii. Gegeven een graaf $G=(V, E)$ en een integer K , heeft G een vertex cover van ten minste K knopen?

Er geldt:

- a. i. en ii. zijn beide NP-volledig problemen.
- b. i. is een P-probleem.
- c. i. is polynomiale-tijd reduceerbaar naar het probleem ii.
- d. ii. is polynomiale-tijd reduceerbaar naar probleem i.

Vraag 2. Gegeven zijn 3 beslissingsproblemen A, B en C. A is een NP-hard probleem, B en C zijn NP-problemen. Er geldt nu:

- a. Als $A \leq C$, dan geldt $C \in \text{NPC}$.
- b. Als $C \leq A$, dan geldt $A \in \text{NPC}$.
- c. Als $A \leq B$ dan $C \leq B$.
- d. $B \leq C$ of $C \leq B$.

Vraag 3. Veronderstel, dat er een coNP probleem X wordt gevonden, dat tevens PSPACE-volledig blijkt te zijn. Welke van de volgende uitspraken is of zijn in dat geval waar?

- a. $\text{NP} = \text{PSPACE}$.
- b. $\text{PSPACE} = \text{coNP}$.
- c. $\text{NPC} \neq \text{co-NPC}$.
- d. $\text{coNP} = \text{NP}$.

Vraag 4. SAT-MINIMUM is het volgende probleem:

Gegeven een satisfiability instantie (U, C) , bestaat er een waarheidstoekenning $\tau : U \rightarrow \{0, 1\}$ die tenminste één clause uit C waar maakt?

Dit probleem is:

- a. oplosbaar in polynomiale tijd.
- b. een NP-compleet probleem.
- c. een co-NP-compleet probleem.
- d. een probleem in $\text{NP} \cap \text{co-NP}$.

Vraag 5. Welke van onderstaande beweringen zijn correct (onder de aanname dat $\text{NP} \neq \text{P}$)?

- a. Een probleem kan niet in zowel NP als co-NP liggen.
- b. Sterk-NP-volledige problemen kunnen geen pseudo-polynomiaal algoritme hebben.
- c. Voor ieder tweetal problemen A en B in PSPACE geldt: $A \leq B$ of $B \leq A$.
- d. Voor ieder NP-probleem A bestaat er een sterk-NP-volledig probleem B waarvoor $A \leq B$.

OPEN VRAGEN I (30 PUNTEN)

Onderstaande vragen dient u kort te beantwoorden.

Een antwoord dient in hoogstens 5-7 regels gegeven te worden.

- Vraag 11. Een complexiteitsklasse C is naar beneden gesloten onder $\leq$ als uit $X \in C$ en $Y \leq X$ volgt dat $Y \in C$. Beargumenteer dat PSPACE naar beneden gesloten is onder $\leq$.
- Vraag 12. Het probleem FINDPARTITION is het probleem om, gegeven een verzameling items $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ en een gewichtfunctie $g: A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ een deelverzameling A' van A te bepalen (als zo'n deelverzameling bestaat) zodanig dat het totaalgewicht van de items in A' en $A - A'$ gelijk is. Als zo'n deelverzameling niet bestaat moet `nil` als antwoord worden gegeven.
Het KNAPSACK probleem is een beslissingsprobleem waarin gegeven een verzameling items $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, een gewichtfunctie $g: A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ en een integer t , nagegaan moet worden of er een deelverzameling A' van A bestaat waarvan het totaal gewicht $\sum_{a \in A'} g(a)$ gelijk is aan t .
Geef een algoritme voor FINDPARTITION waarbij een algoritme voor KNAPSACK als orakel wordt aangeroepen.
- Vraag 13. Waarom is het niet mogelijk dat er een constante k bestaat, zodat alle problemen in $\mathbf{P}$ worden opgelost in $O(n^k)$?
- Vraag 14. Onder welke condities geldt $\mathbf{P}^{\text{co-NP}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{NP}}$?
- Vraag 15. Geef de exacte definitie van de performanceratio van een approximatiealgoritme A voor een instantie x van een optimalisatieprobleem P .