

Tentamen TI3300 / IN3105

Complexiteitstheorie

24 juni 2013,

9.00-12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 10 meerkeuzevragen, 5 korte (open) vragen en 2 open vragen.
- Voor de meerkeuzevragen kunt u maximaal 50 punten behalen, voor de korte open vragen maximaal 30 punten en voor de open vragen maximaal 20 punten.
- Het totaal aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) wordt als volgt bepaald:
 - o per meerkeuzevraag i wordt het aantal foutief beantwoorde alternatieven f_i bepaald. aangezien per vraag 0,1,2,3 of 4 alternatieven juist kunnen zijn geldt: $0 \leq f_i \leq 4$;
 - o Laat $f = \sum f_i$ voor alle 10 meerkeuzevragen ($0 \leq f \leq 40$) ; het aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) is dan $mp = 50 \times \max\{0, (40 - 1.5 \times f) / 40\}$.
- Het eindcijfer c wordt bepaald door de som te nemen van mp, het totaal aantal punten behaald voor de 5 korte vragen (kv) en de som van het aantal punten behaald voor de twee open vragen (ov) en vervolgens het resultaat te delen door 10: $c = (mv + kv + ov) / 10$; dit cijfer wordt vervolgens afgerond op het dichtstbijzijnde halve of gehele getal.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen, boek of andere bronnen is niet toegestaan.
- Het gebruik van grafische en niet-grafische rekenmachines is eveneens niet toegestaan.
- Beantwoord de meerkeuze vragen op het bijgeleverde antwoordformulier.
- Beantwoord de open vragen zo bondig mogelijk; geef geen irrelevante informatie, dit kan leiden tot puntenaftrek!
- Controleer of u op ieder blaadje uw naam en studienummer heeft vermeld en geef het totaal aantal ingeleverde bladen op (tenminste) de eerste pagina.

Notationele conventies:

- $A \leq B$ betekent dat er een polynomiale-tijd reductie van A naar B bestaat.
- A^c is het complement van het probleem A.
- Er wordt steeds vanuit gegaan, dat **P** $\neq$ **NP** en **NP** $\neq$ **coNP**, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel wordt vermeld.

MEERKEUZEVRAGEN (50 PUNTEN)

Vraag 1. Welke van onderstaande beweringen zijn correct onder de aanname dat $\mathbf{NP} \neq \mathbf{P}$?

- a. Een probleem kan niet zowel in $\mathbf{P}$ als in $\mathbf{NPC}$ liggen.
- b. Alle $\mathbf{NP}$ -harde problemen zijn tevens $\mathbf{NPC}$ -problemen.
- c. Voor ieder tweetal problemen A en B in $\mathbf{NP}$ geldt: er bestaat een probleem C waarvoor $A \leq C$ en $B \leq C$.
- d. Voor ieder $\mathbf{NP}$ -probleem A bestaat er een $\mathbf{P}$ -probleem B met $B \leq A$.

Antwoord

- a. is juist, $\mathbf{P}$ en $\mathbf{NPC}$ zijn disjunct onder de aanname dat $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.
- b. is niet juist: $\mathbf{NP}$ -hard omvat $\mathbf{NPC}$.
- c. juist: kies voor C een $\mathbf{NPC}$ probleem.
- d. juist: als $A \neq \emptyset$ of $A \neq \Sigma^*$, kies dan een willekeurig $\mathbf{P}$ -probleem B .
Er geldt dan altijd $B \leq A$. Als $A = \emptyset$ of $A = \Sigma^*$, kies dan $B = A$.

Vraag 2. Ga na welke van de volgende uitspraken juist is/zijn:

- a. Als A een $\mathbf{P}$ -probleem is, dan is A^c een $\mathbf{PSPACE}$ -probleem.
- b. $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{co-NP}}$.
- c. Als $A \in \mathbf{EXP}$, dan geldt $A \in \mathbf{NP} \cup \mathbf{co-NP}$.
- d. $\mathbf{NP} \cup \mathbf{co-NP} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{NP}}$.

Antwoord

- a. is juist want $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{PSPACE}$ en $\mathbf{P}$ is gesloten onder complement.
- b. is juist want $\mathbf{NP} \cup \mathbf{co-NP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$ en $\mathbf{P}^{\mathbf{NP}} = \mathbf{P}^{\mathbf{co-NP}}$.
- c. is niet juist want $\mathbf{NP} \cup \mathbf{co-NP} \subseteq \mathbf{EXP}$ en niet andersom.
- d. is juist, want $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{NP}}$ en $\mathbf{co-NP} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{NP}}$.

Vraag 3. Het probleem om, gegeven een ongerichte graaf $G = (V, E)$ en een integer k te bepalen of

- a. G geen enkel simpel pad bevat met lengte $\geq k$, is een $\mathbf{co-NP}$ -volledig probleem.
- b. G hoogstens één hamiltons circuit bevat, is een $\mathbf{co-NP}$ -volledig probleem.
- c. G een simpel pad met lengte k bevat, is een $\mathbf{NP}$ -volledig probleem.
- d. tenminste twee hamiltonse paden bevat, is een $\mathbf{NP}$ -volledig probleem.

Antwoord

- a. is juist, het complement van dit probleem is een $\mathbf{NPC}$ probleem.
- b. is juist, het probleem om te bepalen of er geen 2 of meer hamiltonse circuits bestaan is een $\mathbf{co-NP}$ volledig probleem: het complement (bestaan er minstens 2 of meer hamiltonse circuits) is een $\mathbf{NP}$ -volledig probleem.
- c. is juist, voor $k = n-1$ is dit het HAMPAD probleem.
- d. is juist, het is een $\mathbf{NP}$ -probleem en HAMPAD is reduceerbaar naar dit probleem.

Vraag 4. Gegeven zijn de beslissingsproblemen A , B en C met $A \leq C$ en $B \leq C$. Het is bekend dat B een $\mathbf{NP}$ -hard probleem is.

Onder welke condities is het zeker dat B een $\mathbf{NPC}$ -probleem is?

- a. als C een $\mathbf{NP}$ -probleem is.
- b. als A een $\mathbf{NPC}$ -probleem is.
- c. als $A \leq B$ en A is een $\mathbf{NPC}$ -probleem.
- d. als A een $\mathbf{NP}$ -probleem is.

Antwoord a. is waar: als C een $\mathbf{NP}$ -probleem is, dan is B ook een $\mathbf{NP}$ -probleem, dus is B een $\mathbf{NPC}$ -probleem.

b. is onwaar: er volgt alleen dat C een $\mathbf{NP}$ -hard probleem is, maar dit zegt niets over het lidmaatschap van $\mathbf{NP}$ voor B .

c. is onwaar: als $A \leq B$ en A in $\mathbf{NPC}$, dan is B een $\mathbf{NP}$ -hard probleem, maar dat wisten we al.

d. is onwaar: er volgt alleen uit dat C minstens zo moeilijk is als A en we kunnen niets extra's concluderen t.a.v. B .

Vraag 5. Het BINPACKING probleem bestaat uit een verzameling van N items $1, 2, \dots, N$, waarbij ieder item j een gewicht $0 < s_j \leq 1$ heeft. Verder is een verzameling vaten (bins) beschikbaar ieder met capaciteit 1. Gevraagd wordt zo weinig mogelijk vaten te gebruiken om alle items op te bergen zonder dat de capaciteit van de vaten overschreden wordt, dwz. de som van de gewichten s_j van de items j die opgeborgen wordt in enig vat v mag niet meer dan 1 bedragen.

Op het college is hiervoor het volgende (NEXTFIT) benaderingsalgoritme besproken:

Plaats de items in een willekeurige volgorde. Neem een vat.

Voor item $j = 1$ tot N doe het volgende:

Als item j in het meest recente vat past, dan stop het in het vat,
anders

pak een nieuw vat;

(dit wordt het meest recente vat)

stop item j in dit vat.

Dit algoritme laat zien dat er voor het BINPACKING probleem een benaderingsalgoritme bestaat met een approximatieratio gelijk aan

- a. 3
- b. 1.5
- c. $O(\log N)$
- d. 1

Antwoord: Het NEXTFIT algoritme is een 2-approximatie algoritme voor dit probleem (zie slides lecture 5). Dan bestaat er voor iedere $x \geq 2$ een x -approximatie algoritme voor dit probleem. Daarom zijn alternatief a. en alternatief c. juist. Alternatief b. en d. zijn niet juist omdat niet uit het feit dat er een x -approximatie algoritme bestaat voor een probleem geconcludeerd kan worden dat er een y -approximatie-algoritme bestaat voor een $y < x$.

Vraag 6. Neem het probleem om, gegeven een ongerichte graaf $G = (V, E)$ en twee positieve integers K en L , te beslissen of er een minstens één simpel pad ter lengte van K in G bestaat, maar geen enkel simpel pad in G bestaat met lengte $\geq L$. Er geldt:

- a. als dit probleem een **P**-probleem zou zijn, dan zou gelden dat **P=NP**.
- b. dit probleem is een **NP**-probleem.
- c. dit probleem is een **co-NP** probleem.
- d. HAMPAD is polynomiaal reduceerbaar naar dit probleem.

Antwoord: Het probleem is een probleem in **P^{NP}**. Omdat voor $K = |V| - 1$ en $L = |V|$ dit probleem equivalent is aan het HAMPAD probleem, volgt onmiddellijk dat alternatief a. en d. juist zijn. Alternatief b. en c. zijn niet juist: er is geen polynomiale verificatie van yes- dan wel no-instanties voorhanden.

Vraag 7. Er zijn 3 beslissingsproblemen A, B en C. Het probleem A is een **co-NP** probleem, B is een **NP**-probleem en C is een **NP-hard** probleem. Er geldt nu

- a. Als $A \leq C$, dan geldt **NP = co-NP**.
- b. Als $C \leq A$, dan geldt **P = NP**.
- c. $A \leq B$ of $B \leq A$.
- d. $B \leq C$.

Antwoord a. is onjuist, want A kan bv. een **P**-probleem zijn.
b. is onjuist: alleen **NP = co-NP** zou kunnen volgen als $C \leq A$.
c. is onjuist: neem maar eens voor A een probleem zonder yes-instanties en B een probleem zonder no-instanties.
d. is juist per definitie van NP-harde problemen.

Vraag 8. Het probleem om, gegeven een ongerichte graaf $G = (V, E)$, te bepalen of G *geen unieke hamiltons pad* heeft (dwz. er bestaat geen hamiltons pad voor G of er bestaat meer dan een hamiltons pad voor G) is een probleem in

- a. **P**
- b. **co-NP**
- c. **P^{NP}**
- d. **NP $\cap$ co-NP**

Antwoord Alternatief c. is juist: raadpleeg eerst een NP-orakel om na te gaan of G een hampad heeft; als het antwoord *nee* is geef dan *ja* als output; anders als er zo'n hampad bestaat, construeer dan met de zelf-reduceerbaarheidsconstructie (met een aantal NP-orakel aanroepen) een hampad; Ga nu voor alle kanten e die in het hampad voorkomen na of er een hampad in de graaf $G - \{e\}$ bestaat (de graaf die je overhoudt als je e verwijdert uit de kantenset E). Zodra een van zulke orakelaanroepen met *yes* wordt beantwoord, dan is het gevonden hampad niet uniek.
De overige alternatieven zijn niet juist.

Vraag 9. Ga na welke van de volgende uitspraken juist is/zijn voor een probleem A :

- a. Als $A \in \mathbf{PSPACE}$, dan geldt $A^c \in \mathbf{PSPACE}$.
- b. Als $A \in \mathbf{NP}$ dan geldt $A \in \mathbf{P^{co-NP}}$.
- c. Als $A \in \mathbf{PSPACE}$ dan geldt $A \in \mathbf{NPC}$.
- d. Als $A \in \mathbf{NP}$ en/of $A \in \mathbf{co-NP}$, dan geldt $A \in \mathbf{NP^{NP}}$.

Antwoord

- a. is juist
- b. is juist
- c. is onjuist
- d. is juist

Vraag 10. Het door Sipser besproken *amplification lemma* komt er op neer dat $\mathbf{BPP} = \mathbf{BPP}_\delta$ voor elke $0 < \delta < 0.5$. Hierbij is $\mathbf{BPP}_\delta$ de klasse van alle talen L waarvoor er een polynomiale probabilistische Turing machine M bestaat met de eigenschap dat

- (i) als $w \in L$ dan geldt $\Pr(M \text{ accepteert } w) \geq 0.5 + \delta$
- (ii) als $w \notin L$ dan geldt $\Pr(M \text{ verwierpt } w) \geq 0.5 + \delta$.

Welke van de volgende uitspraken zijn waar?

- a. Voor $\delta = 0.5$ geldt $\mathbf{BPP}_\delta = \mathbf{P}$.
- b. Voor $\delta = 0$ geldt $\mathbf{BPP}_\delta = \mathbf{PP}$.
- c. Voor $\delta = 0.5$ geldt $\mathbf{BPP}_\delta = \mathbf{NPC}$.
- d. Voor elke δ met $0 < \delta < 0.5$ geldt $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{BPP}_\delta \subseteq \mathbf{NP}$.

Antwoord a. is juist: kans op verwerpen van $w \notin L$ en accepteren $w \in L$ is 1.
b. is onjuist, voor $\mathbf{PP}$ geldt $\Pr(M \text{ accepteert } w) > 0.5$
c. is onjuist want $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ bij assumptie.
d. is onjuist: het is niet bekend of $\mathbf{BPP} \subseteq \mathbf{NP}$ dan wel $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{BPP}$.

**Onderstaande vragen dient u kort te beantwoorden.
Een antwoord dient in hoogstens 5-7 regels gegeven te worden.**

Vraag 11. Geef precies aan, waarom nooit kan gelden dat $\mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{NPC}$.

antwoord er geldt $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE}$ en $\mathbf{NPC} \subsetneq \mathbf{NP}$. Daarmee geldt $\mathbf{NPC} \subsetneq \mathbf{PSPACE}$. Dit sluit bovenstaande inclusierelatie uit.

Vraag 12. Een zuivere k -SAT clause bestaat uit k verschillende literals die niet elkaars complement kunnen zijn.
Toon aan dat iedere verzameling van hoogstens $2^k - 1$ van zulke zuivere clauses vervulbaar is of geef een tegenvoorbeeld van deze bewering.

antwoord Één k -SAT clause sluit precies 1 waarheidstoekenning uit voor vervulbaarheid uit de in totaal 2^k waarheidstoekenningen voor zo'n clause. Voor een verzameling van $2^k - 1$ van zulke clauses zijn er minstens 2^k verschillende waarheidstoekenningen. Deze clauses tezamen sluiten hoogstens $2^k - 1$ waarheidstoekenningen uit. Er blijft derhalve minstens één waarheidstoekenning over die alle clauses vervult.

Vraag 13. Geef zo nauwkeurig mogelijk de relaties ($=$, $\subset$ of $\subseteq$) tussen de volgende klassen: $\mathbf{EXP}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{NL}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}$ en $\mathbf{PSPACE}$.

Antwoord zie slide 11/12 college 5

Vraag 14. Stel dat VERTEX COVER oplosbaar blijkt te zijn in $O(n^c)$ voor een zekere constante c .
Laat zien dat er ook dan geen constante k bestaat zodat ieder $\mathbf{NP}$ -probleem oplosbaar is in $O(n^k)$.

antwoord Als vertex cover in polynomiale tijd oplosbaar zou zijn, dan geldt $\mathbf{P}=\mathbf{NP}$. Uit de tijdhiërarchie stelling volgt dat voor iedere k geldt, dat er problemen oplosbaar zijn in $O(n^{k+1})$ die niet oplosbaar zijn in $O(n^k)$. Als er een k bestaat zodat alle $\mathbf{P}=\mathbf{NP}$ -problemen oplosbaar zijn in $O(n^k)$ dan zouden er polynomiaal oplosbare problemen zijn die niet tot $\mathbf{P}$ behoren. Contradictie. Zo'n k kan dus niet bestaan.

Vraag 15. Stel dat quantum computing gebruikt zou kunnen worden om backtracking algoritmen voor $\mathbf{NP}$ -complete problemen te ontwikkelen.
Waarom is het dan niet waarschijnlijk dat deze backtracking algoritmen polynomiale tijd algoritmen zullen zijn?

antwoord Zulke backtracking algoritmen zijn te beschouwen als algemene zoekalgoritmen voor combinatorische problemen. Als er efficiënte quantumzoek algoritmen zouden bestaan, dan zou er ook een efficiënte implementatie van het algoritme van Grover bestaan. Vazirani et al hebben echter laten zien dat het algoritme van Grover hoogstens een kwadratische speedup in vergelijking met klassieke algoritmen kan behalen en een exponentiele looptijd hebben.

OPEN VRAGEN II (20 PUNTEN)

Beantwoord onderstaande vragen zo kort mogelijk. Geef geen irrelevante informatie, dit kan tot puntenaftrek aanleiding geven.

Vraag 16. (10 punten)

Een boolese formule ϕ is in disjunctieve normaal vorm (DNF) als ϕ bestaat uit een disjunctie van conjuncties. Bijvoorbeeld $(a \wedge b) \vee (\neg c \wedge d \wedge e)$ is een formule in DNF. Een boolese formule ϕ is in conjunctieve normaal vorm (CNF) als ϕ bestaat uit een conjunctie van disjuncties. Bijvoorbeeld $(a \vee b) \wedge (\neg c \vee d \vee e)$ is een formule in CNF.

a. Laat zien dat het probleem:

Gegeven een formule ϕ in DNF, is ϕ vervulbaar?
een **P** probleem is.

antwoord: de formule is vervulbaar alss er minstens een conjunct is die geen paar van complementaire literals bevat. Dit kan in polynomiale tijd beslist worden.

b. Er bestaat een algoritme dat gegeven een formule ϕ in DNF een formule ψ in CNF retourneert zodanig dat ϕ vervulbaar is dan en slechts dan als ψ vervulbaar is. Volgt hier nu wel of niet uit dat het vervulbaarheidsprobleem voor boolese formules in CNF een **P**-probleem is? Beargumenteer uw antwoord.

antwoord Hier volgt niet uit dat SAT (vervulbaarheid voor CNF formules) een P-probleem is, omdat niet gegeven is dat het omzettingsalgoritme een polynomiaal algoritme is. (In feite kennen we geen polynomiaal omzettingsalgoritme en gaat de omzetting van een formule in DNF naar CNF met een exponentiele toename van de lengte van de formule gepaard.)

Vraag 17. (15 punten)

Het detecteren van cliques in sociale netwerken is een belangrijk probleem. Een speciaal probleem is het bepalen van het minimale aantal cliques waarin een gegeven netwerk kan worden opgedeeld. In dit verband definiëren we het volgende probleem:

Naam: CLIQUE COVER

Input: Een graaf $G = (V, E)$ en een positieve integer k .

Vraag: Kan G overdekt worden met hoogstens k cliques, dwz. zijn er ten hoogste k subgrafen van G te vinden die tevens cliques zijn, zodat iedere knoop v uit V in minstens één van deze cliques voorkomt?

Iemand beweert dat heel eenvoudig kan worden aangetoond dat dit probleem een **NP**-volledig probleem is. Zijn redenering luidt als volgt:

Neem een CLIQUE-instantie $\langle G = (V, E), k \rangle$ en beschouw de volgende reductie naar een CLIQUE COVER instantie $\langle G', k' \rangle$: laat $G' = G$ en $k' = n - k + 1$. Deze reductie is polynomiaal en toont aan dat $\text{CLIQUE} \leq \text{CLIQUE COVER}$.

a. Toon aan, dat deze reductie niet correct is door het geven van een tegenvoorbeeld.

Antwoord:

Tegenvoorbeeld: Neem twee volledige grafen G_1 met 4 knopen en G_2 met 2 knopen die onderling geen kanten hebben. Laat de graaf G bestaan uit G_1 en G_2 . G heeft geen clique ter grootte van 5. G heeft echter wel een clique cover ter grootte van $6 - 5 + 1 = 2$: neem G_1 en G_2 .

- b. Laat zien dat dit probleem een NP-hard probleem is met een polynomiale reductie van het GRAPH-k-COLOR probleem (Gegeven een graaf $G = (V, E)$ en een integer k is de graaf k -kleurbaar, dwz er bestaat er een functie $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ met $f(u) \neq f(v)$ als $\{u, v\} \in E$).

Antwoord:

Constructie reductie:

Neem instantie $\langle G = (V, E), k \rangle$ van GRAPH-k-COLOR. Beschouw de complementaire graaf $G' = (V, E^c)$ en laat $k' = k$.

Correctheid:

$\langle G', k' \rangle$ heeft een clique cover ter grootte van k' desda $\langle G, k \rangle$ heeft een k -coloring:

Stel $\langle G = (V, E), k \rangle$ is yes-instantie van GRAPH-k-COLOR. Dan bestaat er een k -coloring f van G . Voor $j = 1, \dots, k$, laat $V_j = \{v \in V \mid f(v) = j\}$. Nu geldt V_j is een clique in G' : immers $v, v' \in V_j$ impliceert $f(v) = f(v')$ en derhalve $\{u, v\} \notin E$ dus $\{u, v\} \in E^c$. Derhalve kan G' gecovered worden met k verschillende cliques.

Omgekeerd, laat $\langle G', k' \rangle$ een clique cover ter grootte van k' hebben. Dan bestaan er k disjuncte (!) cliques $V_1, \dots, V_k$ die G' overdekken. Construeer nu een coloring f met $f(v) = j$ als $v \in V_j$. f is een valide coloring: Stel $f(u) = f(v)$ dan geldt $u, v \in V_i$ voor een $1 \leq i \leq k$, maar dan geldt $\{u, v\} \in E^c$, dus $\{u, v\} \notin E$.

Polynomialiteit:

De reductie kan in $O(|I|)$ tijd uitgevoerd worden en is derhalve polynomiaal.

EINDE TENTAMEN