

Uitwerking Tentamen TI3300

Complexiteitstheorie

30 september, 9.00- 12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 10 meerkeuzevragen, 5 korte (open) vragen en 2 open vragen.
- Per meerkeuzevraag kunnen 0 tot 4 alternatieven juist zijn.
- Voor de meerkeuzevragen kunt u maximaal 50 punten behalen, voor de korte open vragen maximaal 30 punten en voor de open vragen maximaal 20 punten.
- Het totaal aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) wordt als volgt bepaald:
 - o per meerkeuzevraag i wordt het aantal foutief beantwoorde alternatieven f_i bepaald (0-4);
 - o de som $f = \sum f_i$ voor alle 10 meerkeuzevragen wordt bepaald ($0 \leq f \leq 40$);
 - o het aantal punten mp is dan gelijk aan $mp = 50 \times \max\{0, (40 - 1.5 \times f) / 40\}$.
- Het eindcijfer c wordt bepaald door de som te nemen van mp , het totaal aantal punten behaald voor de 5 korte vragen kv en de som van het aantal punten behaald voor de twee open vragen ov , en vervolgens het resultaat te delen door 10: $cv = (mv + kv + ov) / 10$; dit cijfer wordt vervolgens afgerond op het dichtstbijzijnde halve of gehele getal.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen, boek of andere bronnen is niet toegestaan.
- Het gebruik van grafische en niet-grafische rekenmachines is eveneens niet toegestaan.
- Beantwoord de meerkeuzevragen op het bijgeleverde antwoordformulier.
- Beantwoord de open vragen zo bondig mogelijk; geef geen irrelevante informatie, dit kan leiden tot puntenaftrek!
- Controleer of u op ieder blaadje uw naam en studienummer heeft vermeld en geef het totaal aantal ingeleverde bladen op (tenminste) de eerste pagina.

Notationele conventies:

- $A \leq B$ betekent dat er een polynomiale-tijd reductie van A naar B bestaat.
- A^c is het complement van het probleem A .
- Er wordt steeds vanuit gegaan, dat $P \neq NP$ en $NP \neq coNP$, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel wordt vermeld.

MEERKEUZEVRAGEN (50 PUNTEN)

Vraag 1. Het is bekend dat CLIQUE een **NP**-compleet probleem is. Daarom geldt dat:

- a. geen enkele probleeminstantie van CLIQUE in polynomiale tijd oplosbaar is.
- b. CLIQUE polynomiaal reduceerbaar is naar ieder probleem in **NP**.
- c. alle probleeminstanties van CLIQUE in exponentiële tijd oplosbaar zijn.
- d. sommige probleeminstanties van CLIQUE niet in polynomiale tijd oplosbaar zijn.

Antwoord

Alternatief a. is onjuist (het is net andersom)

Alternatief b. is onjuist: er zijn ook efficiënt oplosbare instanties zoals het bepalen van alle cliques ter grootte van 2 in een graaf.

Alternatief c. is juist omdat $NP \subseteq EXP$.

Alternatief d. is juist omdat CLIQUE een NPC probleem is en $P \neq NP$ (aanname pag. 1)

Vraag 2. Het probleem om, gegeven een ongerichte graaf $G = (V, E)$, te bepalen of G

- a. geen enkel hamiltons pad bevat is een **NP**-volledig probleem.
- b. niet meer dan één hamiltons pad bevat is een **co-NP**-volledig probleem.
- c. exact één hamiltons pad bevat is een probleem in **P**.
- d. tenminste twee hamiltonse paden bevat is een **NP**-volledig probleem.

Antwoord

a. is onjuist omdat dit een probleem een coNP-volledig probleem is.

b. is juist

c. is onjuist: het is een probleem in **P^{NP}**

d. is juist.

Vraag 3. Voor twee problemen X en Y geldt dat er een **NPC**-probleem A bestaat zodanig dat $X \leq A$ en $A \leq Y$. Welke van de volgende uitspraken is (zijn) waar?

- a. Y is een **NP**-probleem.
- b. X is een **NP**-probleem.
- c. Als Y een **P**-probleem is, dan is $P = NP$.
- d. Y is een **NP-hard** probleem.

Antwoord

a. is onjuist

b. is juist: NP is naar beneden gesloten

c. is juist: hieruit volgt $A \in P \cap NPC$. Dit is alleen mogelijk als $P = NP$.

d. is juist: Y is minstens zo moeilijk als A .

Vraag 4. Welke van onderstaande beweringen zijn correct (onder de aanname dat $NP \neq P$)?

- a. Een probleem kan niet zowel in **P** als in **NPC** liggen.
- b. Alle **NP**-harde problemen zijn tevens **NPC** problemen.
- c. Voor ieder tweetal problemen A en B in **NP** geldt: $A \leq B$ of $B \leq A$.
- d. Voor ieder **P**-probleem A bestaat er een **NP** probleem B met $A \leq B$.

Antwoord

a. is juist: als $P \neq NP$, dan is NPC disjunct met P, omdat $NPC \cap P \neq \emptyset$ impliceert dat $P=NP$.

b. is onjuist: een NP-hard probleem A is alleen NPC probleem, als A een NP probleem is,

c. is onjuist: als we voor A de lege taal en B de volledige taal nemen, geldt c. niet, dus c. is onwaar.

d. is juist, omdat als keuze voor B een NPC probleem volstaat.

Vraag 5. Welke van de volgende uitspraken zijn juist:

- a. Een probleem is **NP**-compleet als er voor iedere instantie van het probleem een exponentieel aantal kandidaatoplossingen aanwezig is.
- b. Als **PSPACE** = **P** dan is **P** = **NP** = **coNP**.
- c. Als $A \in \text{PSPACE}$ dan geldt $A \in \text{NP-hard}$.
- d. $\text{NC} \subseteq \text{NP}$.

Antwoord

- a. is onjuist: zelfs P-problemen als het kortste pad probleem, voldoen aan het gestelde criterium.
- b. is juist: Als $\text{PSPACE} = \text{P}$, geldt $\text{P} = \text{NP}$, omdat NP bevat is in PSPACE. Daarmee geldt ook $\text{P} = \text{NP} = \text{coNP}$.
- c. is onjuist: Als A een PSPACE probleem is, kan A ook een P-probleem zijn, het is derhalve onjuist om te stellen dat A een NP-hard probleem is.
- d. is juist: NC is de klasse van efficient parallelliseerbare problemen en een subklasse van P.

Vraag 6. Van een algoritme A is bekend dat het een c -approximatiealgoritme is voor een minimalisatieprobleem P met $c > 1$. Stel, dat we weten dat voor de optimale waarde $\text{opt}(x)$ van een instantie x geldt $\text{opt}(x) \leq a$ voor een zekere constante a .
Dan geldt voor de mogelijke uitkomsten $A(x)$ van het algoritme A voor deze instantie x :

- a. $a \leq A(x) \leq c$
- b. $A(x) \leq a$
- c. $A(x) \leq a \cdot c$
- d. $c/a \leq A(x) \leq c$

Antwoord alleen alternatief c is juist. Als $\text{opt}(x) \leq a$, dan kan $A(x)$ niet groter zijn dan $a \cdot c$, omdat $A(x)/\text{opt}(x) \leq c$ voor alle instanties x van P. We weten dat $A(x)/\text{opt}(x) \geq 1$, dus $A(x) \geq \text{opt}(x)$, maar dat betekent niet dat $A(x) \geq a$.

Vraag 7. Welke van onderstaande beweringen zijn correct (onder de aanname dat $\text{NP} \neq \text{P}$)?

- a. Een probleem kan niet in zowel **NP** als **EXP** liggen.
- b. Sterk-**NP** volledige problemen kunnen een pseudo-polynomiaal algoritme hebben.
- c. Voor ieder tweetal problemen A en B die **PSPACE**-compleet zijn geldt: $A \leq B$ of $B \leq A$.
- d. Voor ieder sterk **NP**-probleem A bestaat er een **NP**-volledig probleem B waarvoor $A \leq B$.

Antwoord

Alternatief a. is onjuist, omdat **NP** omvat wordt door **EXP**.

Alternatief b. is onjuist, dit is een bekende eigenschap van sterk-NP volledige problemen..

Alternatief c. is juist: alle PSPACE complete problemen zijn even moeilijk.

Alternatief d is juist omdat er minstens een NP-volledig probleem bestaat (zoals CLIQUE)

Vraag 8. Gegeven is het volgende probleem

Instantie: Graaf $G = (V, E)$ en een positieve integer K .

Vraag: Bestaat er een simpel pad $p = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iK})$ in G van K knopen uit V zodanig dat voor iedere knoop $v \in V$ geldt dat ofwel v in het pad p voorkomt of dat er een knoop v_{ij} in p voorkomt waarvoor geldt $\{v, v_{ij}\} \in E$.

Het volgende **NP**-volledige probleem is een restrictie van bovenstaand probleem:

- a. HAMILTOONS PAD.
- b. VERTEX COVER.
- c. PARTITION.
- d. SUBSETSUM.

Antwoord

Alleen a. is juist: neem maar $K = |V|$; in dit geval bestaat er een simpel pad van K knopen dat aan de voorwaarde voldoet alss G een hamiltoons pad heeft. Alle andere genoemde problemen zijn geen restrictie van het bovenstaande probleem.

Vraag 9. Neem het volgende randomized algoritme voor het probleem om, gegeven een lijst A met n getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ te bepalen of er een waarde meer dan $n/3$ maal voorkomt in de lijst.

```
OneThird(A, n)
begin
  i := random(1,n);          % kies een random getal uit 1..n
  x := ai;
  count := 0;
  for k=1 to n do
    if ak = x then count := count+1
    k:=k+1;
  return (count > n/3);
end
```

Met behulp van dit algoritme kan worden aangetoond dat

- er een randomized algoritme bestaat dat altijd een correct antwoord geeft als de lijst A geen enkele waarde bevat die meer dan $n/3$ -maal voorkomt in A .
- voor elke positieve integer k er een randomized algoritme bestaat met polynomiale looptijd dat met kans $< (2/3)^k$ een incorrect antwoord op het bovenstaande probleem geeft als A een getal bevat dat meer dan $n/3$ maal voorkomt.
- dit probleem tot de klasse **PP** behoort.
- dit probleem tot de klasse **BPP** behoort.

Antwoord

als geen waarde y meer dan $n/3$ maal voorkomt in de lijst zal het algoritme altijd een correct antwoord geven: a. is derhalve juist. Als zo'n element wel bestaat, heeft tenminste $1/3$ van het aantal elementen deze waarde. Het algoritme geeft dan met een kans $\geq 1/3$ een juist antwoord.

Als je het algoritme k -maal herhaalt, is de kans op een onjuist antwoord $< (2/3)^k$: b. is derhalve ook juist.

c. en d. zijn op grond van deze eigenschappen en de definities ook juist.

Vraag 10. Welke van de onderstaande inclusierelaties zijn geldig:

- $P \subseteq NPC$
- $PSPACE \subseteq NC$
- $APX \subseteq NPO$
- $P \subseteq BPP$

Antwoord

alternatief a. is onjuist,

alternatief b. is onjuist,

alternatief c. is juist,

alternatief d. is juist.

OPEN VRAGEN I (30 PUNTEN)

Onderstaande vragen dient u kort te beantwoorden.

Een antwoord dient in hoogstens 5-7 regels gegeven te worden.

Vraag 11 Gegeven is een taal $L \in \text{NP}$. Laat zien dat als voor iedere taal $L' \in \text{PSPACE}$ geldt $L' \leq L$, er geldt dat $\text{PSPACE} = \text{NP}$.

antwoord: We weten dat $\text{NP} \subseteq \text{PSPACE}$. Het is dan voldoende te laten zien dat $\text{PSPACE} \subseteq \text{NP}$.
Neem een L' in PSPACE , dan geldt $L' \leq L$. Omdat NP naar beneden gesloten is geldt nu ook $L' \in \text{NP}$. Dus $\text{PSPACE} \subseteq \text{NP}$.

Vraag 12 Het is bekend, dat CLIQUE een NP -compleet probleem is. Ook is bekend dat het complement CO-CLIQUE : *Gegeven een graaf $G = (V, E)$ en een integer K , heeft G geen clique ter grootte van K ?* een **co-NP**-volledig probleem is.
Neem nu het probleem MAXCLIQUE :

Gegeven een graaf $G = (V, E)$ en een integer K , heeft G een clique ter grootte van K en heeft G geen enkele clique ter grootte van $K+1$?

Mr. X beweert nu het volgende:
 MAXCLIQUE bestaat dus uit een **NP**-volledig probleem en een **co-NP**-volledig probleem, m.a.w. MAXCLIQUE is een probleem in $\text{co-NP} \cap \text{NP}$. We weten, dat wanneer $\text{co-NP} \cap \text{NP} \neq \emptyset$ er geldt $\text{co-NP} = \text{NP}$. Welnu, aangezien $\text{MAXCLIQUE} \in \text{co-NP} \cap \text{NP}$, moeten we wel concluderen dat $\text{co-NP} = \text{NP}$.

Geef exact aan waar de fout in de redenering zit.

antwoord

MAXCLIQUE is geen probleem in $\text{co-NP} \cap \text{NP}$. MAXCLIQUE is te beschouwen als een taal L waarvoor geldt dat er een taal L_1 in NP bestaat en een taal L_2 in coNP zodat $L = L_1 \cap L_2$. De klasse van zulke talen is niet gelijk aan $\text{co-NP} \cap \text{NP}$. Het is niet bekend of yes- dan wel no-instanties van L polynomiaal verifieerbaar zijn. Er geldt dan ook $L \in \text{P}^{\text{NP}}$.

Vraag 13. Waarom is het probleem:
Gegeven een graaf $G = (V, E)$ met $|V| \leq 100$, heeft G een vertex cover ter grootte van $|V|/2$? een P -probleem is.

Antwoord

Omdat $|V|$ begrensd is, zijn er hoogstens $(100 \text{ over } 50) = \text{constant}$ aantal subsets van knopen die gecheckt moeten worden op de vertex cover eigenschap. Iedere check kan in constante tijd worden uitgevoerd omdat zo'n deelverzameling een begrensd aantal knopen heeft. Derhalve kan een vertex cover ter grootte van minimaal 50 in constante tijd gevonden worden.

Vraag 14. Onder welke condities geldt $\text{NP}^{\text{co-NP}} = \text{NP}^{\text{NP}}$?

Antwoord Dit geldt altijd, omdat een algoritme dat gebruik maakt van een NP -orakel eenvoudig omgezet kan worden naar een algoritme met een coNP orakel door de antwoorden van het orakel om te draaien.

Vraag 15. Geef een exacte definitie van de klasse **BPP**.

Antwoord BPP is de verzameling van talen L zodat geldt er een polynomiaal randomized algoritme M bestaat waarvoor geldt $\Pr(M(x)=1 \mid x \in L) = \Pr(M(x)=0 \mid x \notin L) \geq \frac{2}{3}$

OPEN VRAGEN II (20 PUNTEN)

Beantwoord onderstaande vragen zo kort mogelijk. Geef geen irrelevante informatie, dit kan tot puntenaftrek aanleiding geven.

Vraag 16. (10 punten)

Het probleem NACHTWAKER bestaat uit

- een ongerichte graaf $G = (V, E)$ waarin V een verzameling locaties is en E een verzameling kanten; $\{v_i, v_j\} \in E$ betekent dat locatie v_i te zien is vanuit v_j en omgekeerd,
- twee positieve integers B en C ,
- een matrix $D = [d_{ij}]$ van afstanden $d_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ tussen locaties v_i en v_j in V .

De vraag is of een nachtwaker in staat is om alle locaties in V te inspecteren door

- alleen een subset V' van locaties met $|V'| \leq B$ aan te doen;
 - hierbij een totale afstand af te leggen $\leq C$ van de eerste locatie in V' tot en met de laatste locatie in V'
 - ervoor te zorgen dat alle locaties in V geïnspecteerd kunnen worden, d.w.z. voor alle locaties v in V moet gelden dat ofwel v te zien is vanuit een locatie in V' ofwel $v \in V'$.
- a. Welke restricties moeten aan instanties van dit probleem opgelegd worden om instanties van VERTEX COVER te krijgen?
- b. Welke restricties moeten aan instanties van dit probleem opgelegd worden om instanties van HAMPAD te verkrijgen?

Antwoord:

a. VERTEX COVER instanties krijg je door te eisen dat G verbonden is, $d_{ij} = 1$ te kiezen voor elk paar knopen v_i en v_j waarvoor $i \neq j$ geldt en $C = |V|$ te kiezen.

b. TSP- instanties krijg je door $E = \emptyset$ en $B = |V|$ te kiezen.

Vraag 17. (10 punten)

Een aantal attractieparken biedt de mogelijkheid om je een route advies te geven zodat je zoveel mogelijk attracties kunt bezoeken. Je geeft het aantal uren dat je kunt doorbrengen in het park en de verzameling attracties die je zou willen bezoeken. Er wordt dan uit deze verzameling attracties een maximaal aantal attracties geselecteerd en de route die je moet volgen om ze te bezoeken. Hiervoor wordt de wachttijd voor de attractie, de echte bezoektijd van de attractie en de afstand (in loopminuten) tussen de attracties meegenomen.

Het eindresultaat is een route door het attractiepark die je

- van de ingang naar de uitgang brengt
 - waarbij het aantal te bezoeken attracties (gekozen uit de opgegeven attracties) maximaal is
 - en je binnen het gegeven aantal te besteden uren blijft.
- a. Laat zien dat gegeven een willekeurig attractiepark met n attracties, gegeven wachttijden en bezoektijden per attractie, en afstanden tussen de attracties het probleem een NP-probleem is: gegeven twee integers k en l is er een route waarbij tenminste k attracties worden bezocht in hoogstens l uren (≤ 5 regels).
- b. Laat zien dat het beslissingsprobleem zoals geformuleerd in a. een NP-volledig probleem is. Je hoeft hiervoor alleen de reductie te formuleren van een bekend NP-volledig probleem naar bovenstaand probleem.

Antwoord

Ad a: Gok een route en verifieer dat de som van de afstanden tussen de attracties + bezoektijd per attractie + wachttijd per attractie $\leq l$ is en er tenminste k attracties op de route liggen.

Ad b: Voor $k=n$ en bezoektijden van alle attracties = 0 en kosten 1 of 2 voor afstanden tussen attracties is dit een hampad probleem.

