

Opmerkingen:

1. Het gebruik van de rekenmachine is **NIET** toegestaan.
2. Geef berekeningen en beargumenteer je antwoorden.
3. Bij iedere vraag mogen resultaten uit voorgaande vragen worden gebruikt.

1. Bepaal de volgende integraal: $\int_{-\infty}^2 x e^x dx$.

Eerst een primitieve bepalen met partiële integratie. We $f'(x) = e^x$ en $g(x) = x$. Dit geeft ons

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = (x - 1) e^x.$$

Nu kunnen we de oneigenlijke integraal dmv een limiet bepalen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^2 x e^x dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^2 x e^x dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [(x - 1) e^x]_t^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^2 - (t - 1) e^t = e^2 \end{aligned}$$

In de laatste stap mag je gebruiken dat $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ voor alle n . Je kunt natuurlijk ook l'Hospital gebruiken.

2. Gegeven is de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2} (4x - 2)^n$.
 - a. Bepaal de convergentiestraal R en het convergentiecentrum a van deze machtreeks. Voor $x = \frac{1}{2}$ zijn alle termen 0 en is de reeks dus convergent.
Voor $x \neq \frac{1}{2}$ gebruiken we het verhoudingskenmerk (ratiotest). Er geldt:

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &= \frac{1}{3(n+1)^2} |4x - 2|^{n+1} \\ |a_n| &= \frac{1}{3n^2} |4x - 2|^n \\ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{n^2}{(n+1)^2} |4x - 2| \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= |4x - 2| \end{aligned}$$

De randpunten van het convergentie-interval liggen dus bij $4x - 2 = 1$ en $4x - 2 = -1$, oftewel bij $x = \frac{3}{4}$ en $x = \frac{1}{4}$. Het convergentiecentrum a ligt daar precies tussenin: $a = \frac{1}{2}$. De convergentiestraal is de afstand van a tot een randpunt, dus $R = \frac{1}{4}$.

b. Bepaal het convergentie-interval I van deze machtreeks. We hoeven alleen nog convergentie in de randpunten te onderzoeken:

- Bij $x = \frac{1}{4}$ krijgen we de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{3n^2}$. Dit is een p -reeks met $p > 1$, dus deze is convergent.
- Bij $x = \frac{3}{4}$ krijgen we de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}$. Voor deze reeks geldt:
 - Het is een alternerende reeks;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n^2} = 0$;
 - $|a_{n+1}| = \frac{1}{3(n+1)^2} < \frac{1}{3n^2} = |a_n|$.

Met het convergentiekenmerk voor alternerende reeksen volgt dus dat ook deze reeks convergent is. Het convergentie-interval is $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

3. Bepaal de volgende limiet: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x\sqrt{1-x^2} - \sin(2x)}{x^3}$. Met behulp van het formuleblad weten we:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2) \quad (\text{voor } |x| < 1) \\ \sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5).\end{aligned}$$

Er volgt:

$$\begin{aligned}2x\sqrt{1-x^2} &= 2x - x^3 + O(x^5) \quad (\text{voor } |x| < 1) \\ \sin(2x) &= 2x - \frac{4}{3}x^3 + O(x^5) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x\sqrt{1-x^2} - \sin(2x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + O(x^5)}{x^3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

4. a. Gegeven is

$$w = \frac{-1 + 7i}{2 + i} + \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}.$$

Schrijf w in de vorm $a + bi$ (met a en b in $\mathbb{R}$).

NB: cosinus en sinus van bekende hoeken dienen expliciet bepaald te worden.

Eerst berekenen we de eerste term met de gebruikelijke truc:

$$\frac{-1 + 7i}{2 + i} = \frac{(-1 + 7i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{5 + 15i}{5} = 1 + 3i.$$

De tweede term kunnen we met de identiteit van Euler herschrijven:

$$\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i \right) = -1 + i.$$

Er volgt dus:

$$w = 1 + 3i + -1 + i = 4i.$$

b. Gegeven is $z = (\sqrt{3} - i)^{-10}$.

Bepaal z en schrijf deze in de vorm $a + bi$ (met a en b in $\mathbb{R}$).

NB: cosinus en sinus van bekende hoeken dienen expliciet bepaald te worden.

Schrijf om naar poolcoördinaten. We berekenen eerst modulus en argument:

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Merk op dat we het argument direct met de arctangens kunnen bepalen, omdat z in het vierde kwadrant van het complexe vlak ligt.

Als we z in polaire vorm zetten, kan z^{-10} met De Moivre worden berekend:

$$z = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$z^{-10} = 2^{-10} \left(\cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{10\pi}{6}\right) \right)$$

$$= 2^{-10} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i \right)$$

$$= \frac{1}{2^{11}} - \frac{1}{2^{11}}\sqrt{3}i$$

$$= \frac{1}{2048} - \frac{1}{2048}\sqrt{3}i.$$

Opmerking: de laatste stap is niet nodig.

5. Gegeven is de functie $f(x, y) = 3 + \ln\left(\frac{x^2 + 1}{y}\right)$.

- a. Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt $(1, 2)$, in de richting $\langle 1, 4 \rangle$. We bepalen eerste de gradiënt van f in punt $(1, 2)$:

$$\nabla f(x, y) = \left\langle \left(\frac{x^2 + 1}{y}\right)^{-1} \frac{2x}{y}, \left(\frac{x^2 + 1}{y}\right)^{-1} \frac{-(x^2 + 1)}{y^2} \right\rangle = \left\langle \frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{-1}{y} \right\rangle$$

$$\nabla f(1, 2) = \left\langle 1, -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Normeer de richtingsvector:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{17}} \langle 1, 4 \rangle.$$

Voor de richtingsafgeleide geldt nu:

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(1, 2) = \frac{-1}{\sqrt{17}}.$$

- b. Geef met behulp van een linearisatie een benadering van $f(1,05, 1,9)$. De algemene formule voor linearisering luidt in een punt (a, b) luidt:

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Toegepast op bovenstaande functie in het punt $(1, 2)$ geeft dit:

$$L(x, y) = 3 + (x - 1) - \frac{1}{2}(y - 2).$$

Er volgt:

$$f(1,05, 1,9) \approx L((1,05, 1,9) = 3 + 0,05 - \frac{1}{2} \cdot (-0,1) = 3,1.$$

6. Gegeven is de functie $f(x, y) = xy^2 - y^2 - 2x^2 + 1$.

Deze functie heeft 3 kritieke punten (ook wel stationaire punten genoemd).

a. Bepaal de coördinaten van alle kritieke punten. Bepaal eerst de gradiënt van deze functie:

$$\nabla f(x, y) = \langle y^2 - 4x, 2xy - 2y \rangle.$$

De coördinaten van de kritieke punten zijn precies de oplossingen van het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} y^2 - 4x = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases}$$

De eerste vergelijking kunnen we herschrijven als: $x = \frac{1}{4}y^2$. Invullen in de tweede levert $\frac{1}{2}y^3 - 2y = 0$, oftewel $y^3 - 4y = 0$. Dit kunnen we factoriseren als $y(y - 2)(y + 2) = 0$. We krijgen de volgende oplossingen:

$$y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$y = -2 \Rightarrow x = 1$$

Dit geeft 3 kritieke punten: $(0, 0)$, $(1, 2)$ en $(1, -2)$.

b. Bepaal voor ieder kritiek punt of f daar een lokaal maximum, minimum of zadelpunt heeft. We passen de tweede-afgeleidetest toe. Eerst bepalen we de tweede-orde afgeleiden van f :

$$f_{xx}(x, y) = -4$$

$$f_{yy}(x, y) = 2x - 2$$

$$f_{xy} = 2y$$

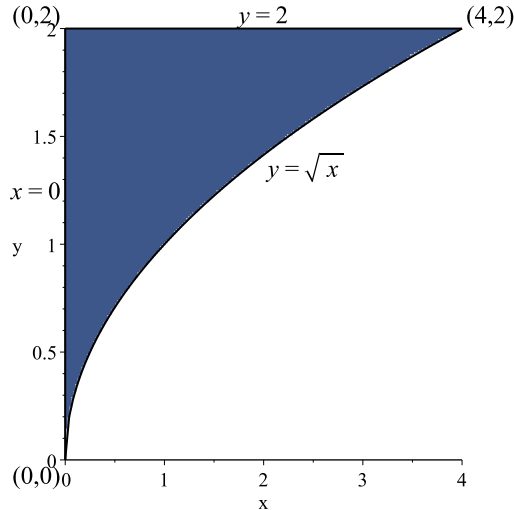
We krijgen de volgende resultaten:

- $D(0, 0) = (-4) \cdot (-2) - 0^2 = 8 > 0$ **en** $f_{xx}(0, 0) < 0$: in $(0, 0)$ heeft f een lokaal maximum.
- $D(1, 2) = (-4) \cdot 0 - 4^2 = -16 < 0$: in $(1, 2)$ heeft f een zadelpunt.
- $D(1, -2) = (-4) \cdot 0 - (-4)^2 = -16 < 0$: in $(1, -2)$ heeft f een zadelpunt.

7. Gegeven is het gebied D begrensd door de krommen $x = 0$, $y = 2$ en $y = \sqrt{x}$, en de functie $f(x, y) = \frac{2x}{1 + y^5}$.

a. Schets gebied D .

Merk op: de lijnen $y = 2$ en $y = \sqrt{x}$ snijden elkaar in het punt $(4, 2)$. Het gebied ziet er als volgt uit:



- b. Schrijf de integraal $\iint_D f(x, y) dA$ op twee manieren als herhaalde integraal: een waarbij eerst over x geïntegreerd wordt en een waarbij eerst over y geïntegreerd wordt.

Stel we integreren eerst in de y -richting. De ondergrens wordt gegeven door $y = \sqrt{x}$, de bovengrens door $y = 2$. De grenzen van x zijn de minimale en maximale waarde die de x -coördinaat in het gebied kan aannemen: $x = 0$ resp $x = 4$. De integraal wordt:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{x=0}^4 \int_{y=\sqrt{x}}^2 \frac{2x}{1 + y^5} dy dx.$$

Integreren we eerst naar x , dan wordt de ondergrens gegeven door $x = 0$, de bovengrens door $x = y^2$. De grenzen van y zijn de minimale en maximale waarde die de y -coördinaat in het gebied kan aannemen: $y = 0$ resp $y = 2$. De integraal wordt:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{y=0}^2 \int_{x=0}^{y^2} \frac{2x}{1 + y^5} dx dy.$$

- c. Bereken de integraal $\iint_D f(x, y) dA$.

Eerst naar y integreren leidt onmiddellijk tot problemen. We integreren eerst naar x , dan naar y :

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{2x}{1 + y^5} dA &= \int_{y=0}^2 \int_{x=0}^{y^2} \frac{2x}{1 + y^5} dx dy \\ &= \int_{y=0}^2 \left[\frac{x^2}{1 + y^5} \right]_{x=0}^{y^2} dy \\ &= \int_{y=0}^2 \frac{y^4}{1 + y^5} dy. \end{aligned}$$

Deze integraal kunnen we met een substitutie bepalen: $u = 1 + y^5$, $du = 5y^4 dy$.
oftewel $\frac{1}{5}du = y^4 dy$.

In termen van u krijgen we (let op de nieuwe grenzen!):

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{2x}{1+y^5} dA &= \int_{u=1}^{33} \frac{1}{5} \frac{1}{u} du \\ &= \left[\frac{1}{5} \ln |u| \right]_{u=1}^{33} \\ &= \frac{1}{5} \ln(33)\end{aligned}$$