

Calculus - TI1106M
Deeltoets 1 (2014) - uitwerkingen

1. **Antwoord:** $x \leq 3$.

Er moet gelden:

- $3 - x \geq 0$,
- $2 + \sqrt{3 - x} > 0$.

Immers: het argument van de wortel moet ≥ 0 zijn, het argument van de logaritme moet > 0 zijn.

De eerste eis is equivalent met $x \leq 3$.

Aan de tweede eis is automatisch voldaan: $\sqrt{3 - x} \geq 0$ voor alle $x \leq 3$, dus $2 + \sqrt{3 - x} > 0$.

De functie is dus gedefinieerd voor $x \leq 3$.

2. **Antwoord:** $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 1}$.

Los op: $y = x^2 - 2x$, bijvoorbeeld met kwadraatafsplitsen:

$$\begin{aligned}y &= (x - 1)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow y + 1 &= (x - 1)^2 \\ \Leftrightarrow \pm\sqrt{y + 1} &= x - 1 \\ \Leftrightarrow 1 \pm \sqrt{y + 1} &= x\end{aligned}$$

Gegeven is dat $x \geq 1$, dus de juiste oplossing is $x = 1 + \sqrt{y + 1}$.

Voor de inverse functie: vervang y door x .

3. **Antwoord:** $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

Teken een rechthoekige driehoek met:

- overstaande zijde $\sqrt{x}$,
- schuine zijde 1,
- hoek α .

Dan geldt:

- aanliggende zijde $= \sqrt{1 - (\sqrt{x})^2} = \sqrt{1 - x}$.
- $\sin(\alpha) = \frac{o}{s} = \sqrt{x}$, oftewel $\alpha = \arcsin(\sqrt{x})$,
- $\tan(\arcsin(\sqrt{x})) = \tan(\alpha) = \frac{o}{a} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}}$.

Dat laatste kan tot het antwoord herschreven worden (niet nodig).

4. **Antwoord:** $-\infty$. Merk op: quotiënt is onbepaald $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Bijvoorbeeld met factoriseren:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x - 2)}{(x - 2)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x - 2}.$$

Teller is positief, noemer gaat naar 0. We naderen vanaf $x < 2$, noemer is daar *negatief*. Het quotiënt nadert dus naar $-\infty$.

5. **Antwoord:** $\frac{1}{2}$

Delen door hoogste macht (x^3):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{\sqrt{4x^6 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3} \sqrt{4x^6 + 1}}.$$

Omdat in limiet $x > 0$, volgt dat $x^3 = \sqrt{x^6}$. De noemer kan herschreven worden:

$$\frac{1}{x^3} \sqrt{4x^6 + 1} = \sqrt{\frac{4x^6 + 1}{x^6}} = \sqrt{4 + \frac{1}{x^6}}.$$

Dus:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{\sqrt{4x^6 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^6}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

6. **Antwoord:** $-\frac{1}{\pi^2}$

$2 \times$ l'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{1 + \cos(\pi x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{-\pi \sin(\pi x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\pi^2 \cos(\pi x)} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \end{aligned}$$

7. **Antwoord:** $-\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (verder uitwerken mag maar hoeft niet)

Met de kettingregel volgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \arccos(\sqrt{x}) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

8. **Antwoord:** $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ (eenvoudig genoeg).

We gebruiken $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ met:

- $a = \frac{\pi}{6}$,
- $f(a) = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,
- $f'(a) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Haakjes wegwerken mag, maar hoeft niet.

9. **Antwoord:** $\frac{1}{2,02} \approx 0,495$, $a = 2$.

De te lineariseren functie: $f(x) = \frac{1}{x}$.

We gebruiken $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ met:

- $a = 2$,
- $f(2) = \frac{1}{2} = 0,5$,
- $f'(a) = -\frac{1}{2^2} = -0,25$.

Er geldt:

$$f(2) \approx L(2) = 0,5 - 0,25(2,02 - 2) = 0,5 - 0,005 = 0,495.$$