

Calculus - TI1106M
Deeltoets 2 (2014) - uitwerkingen

1. Antwoord: $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$

Partieel integreren: kies $f'(x) = x$ en $g(x) = \ln(x)$.

Er volgt:

$$\begin{aligned}\int x \ln(x) dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C.\end{aligned}$$

2. Antwoord: $\int_1^2 2 \arctan(u) du$

Substitutie: $u = \sqrt{x}$, dus $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, oftewel $2du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Grenzen: als $x = 1$, dan $u = 1$. Als $x = 4$, dan $u = 2$.

Invullen geeft

$$\int_1^2 2 \arctan(u) du$$

3. **Antwoord:** divergent.

Het integratiegebied loopt van $-\infty$ naar ∞ . Om convergentie te onderzoeken moeten we de integraal splitsen, bijvoorbeeld als volgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{2x}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

De integraal aan de linkerkant is alleen convergent als beide integralen aan de rechterkant dat ook zijn.

We onderzoeken de tweede:

$$\int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

We voeren een substitutie uit: $u = 1 + x^2$, dus $du = 2x dx$.

Er volgt:

$$\begin{aligned}\int_0^p \frac{2x}{1+x^2} dx &= \int_1^{1+p^2} \frac{1}{u} du \\ &= [\ln |u|]_1^{1+p^2} \\ &= \ln |1+p^2| - \ln |1| = \ln(1+p^2).\end{aligned}$$

Dus:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \ln(1+p^2) = \infty.\end{aligned}$$

De tweede integraal is divergent, dus is de oorspronkelijke integraal ook divergent.

4. **Antwoord:** convergent, som = 30.

Er geldt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3}.$$

De reeks is dus meetkundig, met reden $r = \frac{2}{3}$.

Omdat $-1 < r < 1$, volgt dat de reeks convergent is.

Er geldt dan:

$$\text{som} = \frac{\text{eerste term}}{1 - r} = \frac{\left(5 \cdot \frac{2^1}{3^0}\right)}{1 - \frac{2}{3}} = 30.$$

5. **Antwoord:** convergent, som = e^{-1} .

Gebruik bijvoorbeeld ratiotest (verhoudingskenmerk). Er geldt:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1}.$$

Dus volgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

dus de reeks is convergent.

(NB: dat hadden we ook met de alternerende-reeks-test kunnen bepalen).

Merk op dat deze reeks de Maclaurinreeks van $f(x) = e^x$ is met $x = -1$.

De som is dus e^{-1} .

6. **Antwoord:** convergentiestraal = $\frac{2}{3}$.

We bepalen eerst de randpunten van het convergentiegebied.

Merk op:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{(n+1)(3x-2)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n(3x-2)^n} \right| = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot |3x-2|.$$

Er volgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{2} |3x-2|.$$

De reeks is dus convergent als $\frac{1}{2}|3x-2| < 1$, en divergent als $\frac{1}{2}|3x-2| > 1$.

De randpunten van het convergentiegebied worden gegeven door $\frac{1}{2}|3x-2| = 1$, oftewel $x = 0$ of $x = \frac{4}{3}$.

De convergentiestraal is de afstand van het midden van het gebied ($x = \frac{2}{3}$) tot aan de rand,

dus $R = \frac{2}{3}$.

7. **Antwoord:** $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{27}x^4$.

We kunnen de functie als volgt herschrijven:

$$f(x) = \frac{1}{3+x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1}.$$

Gebruik de binomiaalreeks:

$$(1+y)^{-1} = 1 + \frac{-1}{1!}y + \frac{-1 \cdot -2}{2!}y^2 + \frac{-1 \cdot -2 \cdot -3}{3!}y^3 + \dots \quad (|y| < 1)$$

met $y = \frac{x^2}{3}$. We krijgen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \left(\frac{x^2}{3} \right)^4 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^4}{27} + \dots \end{aligned}$$

8. **Antwoord:** $-\frac{1}{6}$

Er geldt:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5) \\ \sin(x^2) &= x^2 - \frac{1}{6}x^6 + O(x^{10}) \\ \sin(x^2) - x^2 &= -\frac{1}{6}x^6 + O(x^{10}) \\ \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^6} &= -\frac{1}{6} + O(x^4) \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6} + O(x^4) = -\frac{1}{6}.$$

9. **Antwoord:** dalend, begrensd, limiet bestaat.

Dalend:

Er geldt dat $a_n = f(n)$ met $f(x) = \frac{x}{3x^2+1}$.

Bereken de afgeleide van f:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (3x^2 + 1) - x \cdot 6x}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{1 - 3x^2}{(3x^2 + 1)^2}.$$

Merk op dat de teller negatief is als $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$, dus zeker als $x \geq 1$.

Er volgt dat $f(x)$ dalend is voor $x \geq 1$, dus de rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ is ook dalend.

Begrensd:

Ondergrens: zowel teller als noemer zijn positief voor alle $n \geq 1$, dus volgt dat $a_n \geq 0$ voor alle n .

Bovengrens: voor $n \geq 1$ geldt dat $n \leq 3n^2 + 1$, dus

$$a_n \leq \frac{3n^2 + 1}{3n^2 + 1} = 1$$

voor alle $n \geq 1$.

Alternatief: de rij is dalend, dus van boven begrensd. Immers: er geldt $a_n \leq a_1 = \frac{1}{4}$

voor alle $n \geq 1$.

Limiet bestaat:

Bereken limiet met delen door hoogste macht:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}} = 0.$$

Alternatief: de rij is dalend en begrensd. De monotone-convergentie-stelling vertelt ons dat de rij convergent is, dwz, de limiet bestaat.