Technische Universiteit Delft — Mekelweg 4
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica — 2628 CD Delft

Tentamen Financiële Tijdreeksen (WI3411TU)
6 november 2014, 18:30-20:30

Formulebladen, boeken, aantekeningen etc. zijn bij deze toets niet toegestaan.
Een eenvoudige rekenmachine is toegestaan.

1. [2 pt]. Geef de (wiskundige) definitie van een stationaire tijdreeks $\{X_t\}$.

2. Geef van de volgende tijdreeksmodellen voor $\{X_t\}$ aan of het een AR(p), MA(q), ARMA(p,q), ARCH(p), GARCH(p,q) of gecombineerd model betreft. Geef ook steeds de waarden van p en q. Je hoef in deze opgave geen aandacht te schenken aan zaken als "parameter redundancy", stationariteit, inverteerbaarheid en causaliteit.

   (a) [1 pt]. $X_t - Z_t = \frac{1}{3}Z_{t-1}$, waarbij $\{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,1)$.

   (b) [1 pt]. $X_t = \sqrt{0.25 + 0.75X_{t-1}^2 + 0.3X_{t-2}^2}Z_t$, waarbij $\{Z_t\} \sim \mathrm{IID}(0,1)$.

   (c) [1 pt]. $X_t = Z_t + 0.2Z_{t-1} - 0.4Z_{t-2}$, waarbij $Z_t = 0.7\sqrt{Z_{t-1}^2}Y_t$ en $\{Y_t\} \sim \mathrm{IID}(0,1)$.

3. Stel dat $\{X_t\}$ een stationaire tijdreeks is met verwachting gelijk aan nul. We willen X_{t+1} voorspellen met behulp van X_t. Daartoe nemen we de best linear predictor waarbij we alleen gebruikmaken van de voorgaande observatie:

$$P_tX_{t+1} = \alpha X_t,$$

   waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ bepaal dient te worden.

   (a) [1 pt]. Volgens welk criterium kunnen we α bepalen?

   (b) [2 pt]. Bepaal de waarde van α volgens dit criterium.

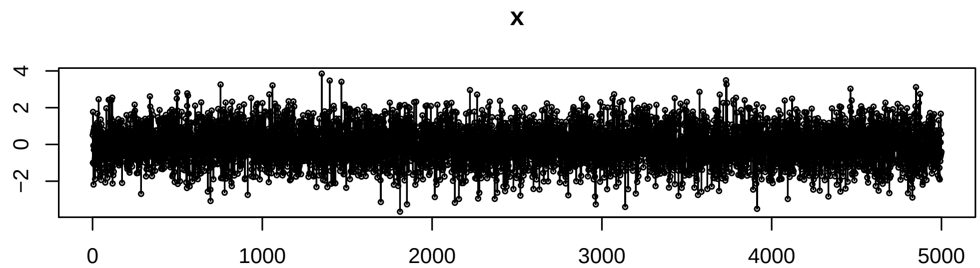
   (c) [1 pt]. Stel dat $\{X_t\}$ een white-noise rij is, wat is dan de optimale waarde voor α?

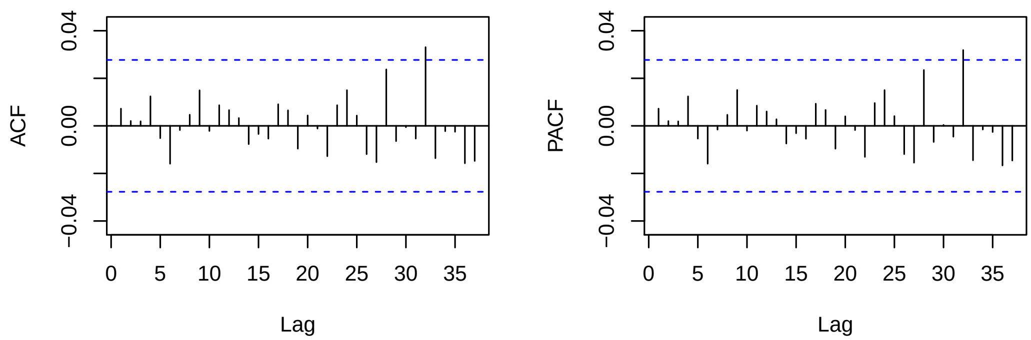
4. We genereren 500 observaties van het ARMA model

$$X_t = 0.9X_{t-1} + Z_t - 0.9Z_{t-1}$$

met $\{Z_t\} \sim$ IID $N(0, 1)$. Onderstaand zie je de bijbehorende time-series plot van de gegenereerde data, een ACF plaatje, en een PACF plaatje.

(a) [1 pt]. Met welk type tijdreeks zou je de data modelleren, op grond van de ACF- en PACF plaatjes?





(b) [2 pt]. We fitten een ARMA(1, 1) model. Zie onderstaand de bijbehorende R-output. Zijn de parameter-schattingen juist? Verklaar de verkregen schattingen.

```
arima(x, order=c(1,0,1), include.mean=FALSE)
Series: x
ARIMA(1,0,1) with zero mean

Coefficients:
         ar1      ma1
      0.5096  -0.5022
s.e.  1.0975   1.1028

sigma^2 estimated as 0.997:  log likelihood=-7087.06
AIC=14180.12   AICc=14180.13   BIC=14199.67
```

5. Beschouw de tijdreeks $\{X_t\}$ gedefinieerd door

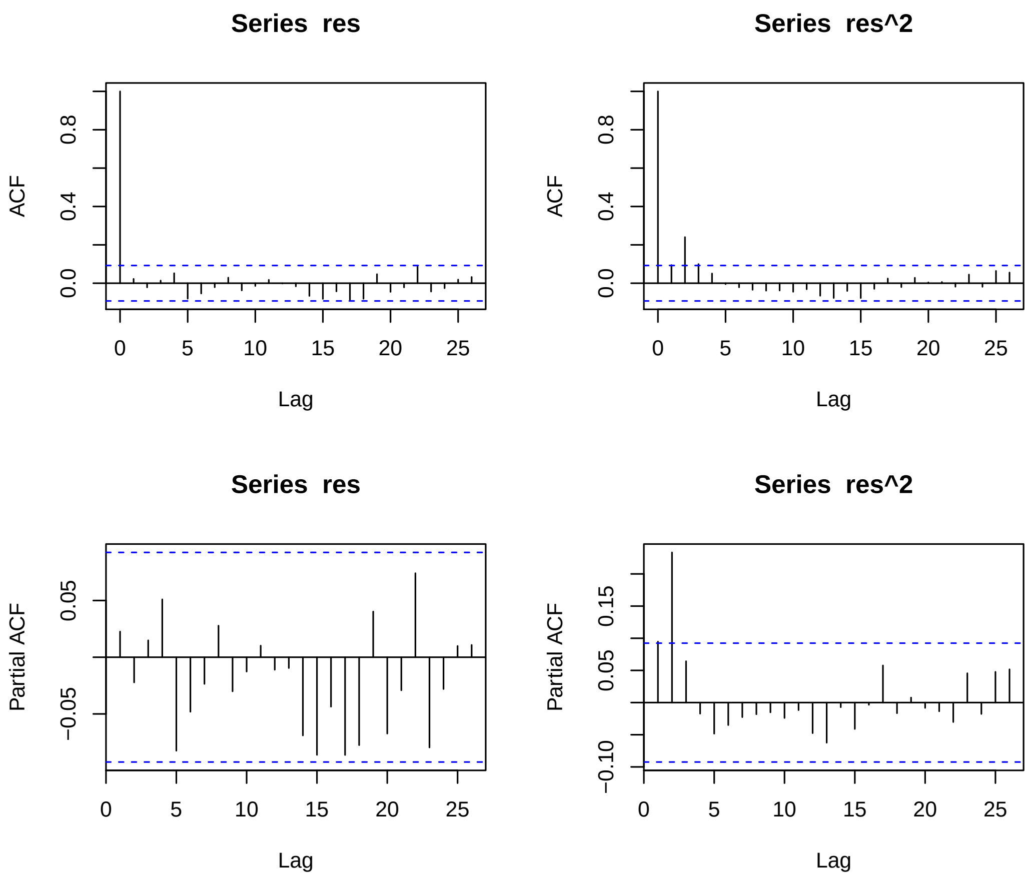
$$X_t - Z_t = 0.9X_{t-1} + \eta Z_{t-1},$$

waarbij $\{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,1)$.

(a) [1 pt]. Schrijf dit model in de vorm $\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t$ voor geschikte polynomen Φ en Θ. Hierbij is B de zogenaamde "backshift operator".

(b) [1 pt]. Ga na voor welke waarden van η de tijdreeks inverteerbaar is.

6. [2 pt]. Beschouw data $\{x_t\}$. Na fitten van een ARMA-model op deze data maken we de volgende plaatjes van de residuen (`res`).



Is er een ARCH-effect in de residuen? Zo ja, wat voor orde ARCH-model zou je fitten (op de residuen)?

7. [2 pt]. Stel dat $X_t = Z_t + 0.4Z_{t-1}$, waarbij $\{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,1)$. Bereken de lag(1)-autocorrelatie voor de tijdreeks $\{X_t\}$.

8. [1 pt]. Stel dat $\{X_t\} \sim \mathrm{ARCH}(1)$ (neem aan dat de coëfficiënten zodanig zijn dat het proces bestaat en stationair is). Laat zien dat $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+1}) = 0$ voor alle t.