

wi3411TU Financiële tijdreeksen

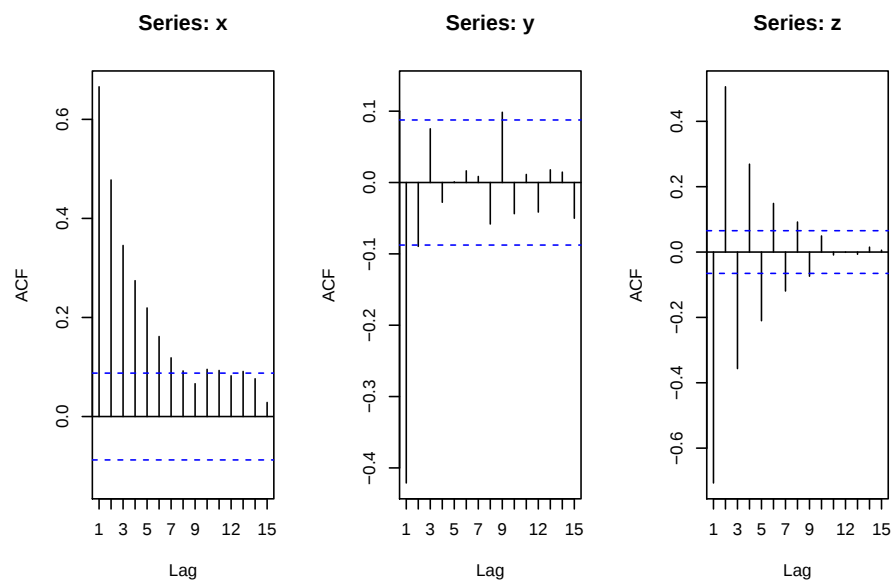
Oefenopgaven voor het tentamen (2014)

Geef bij het tentamen altijd een toelichting bij je antwoord.

1. Geef de definitie van de autocorrelatiefunctie.

Zie boek.

2. Van de tijdreeksen x , y en z zijn de volgende ACF-plots gemaakt.



Geef voor ieder van deze tijdreeksen een plausibel tijdreeksmodel.

Voor een AR(1) model $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ geldt $\rho(h) = \varphi^h$. Tijdreeksen x en z vallen hier allebei onder (waarbij bij x $\varphi > 0$ en bij z $\varphi < 0$). Voor tijdreeks y is de ACF vanaf lag 2 ongeveer gelijk aan nul. Dit duidt op een MA(1)-model.

3. Beschouw het stationaire proces $\{X_t\}$ dat gedefinieerd wordt door de relatie

$$X_t = \alpha + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + Z_t + \theta Z_{t-1}.$$

Hier veronderstellen we dat $\{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$. Leid een uitdrukking af voor de verwachting van het proces in termen van de parameters α , φ_1 , φ_2 , θ en σ^2 .

Hint: neem eerst aan beide kanten van de vergelijking de verwachting en gebruik vervolgens de stationariteit van $\{X_t\}$.

Verwachting aan beide kanten nemen geeft

$$E[X_t] = \alpha + \varphi_1 E[X_{t-1}] + \varphi_2 E[X_{t-2}]$$

Vanwege stationariteit geldt $E[X_t] = \mu$ for all t . Oplossen van de vergelijking geeft

$$\mu = \alpha / (1 - \varphi_1 - \varphi_2).$$

4. Beschouw het volgende ARMA proces

$$X_t + 1.9X_{t-1} + 0.88X_{t-2} = Z_t + 0.2Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2}.$$

- (a) Voor welke polynomen Φ en Θ kunnen we het model schrijven als $\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t$?
- (b) Ga na of het proces causaal is.

Schrijf het model als $\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t$ met

$$\Phi(B) = 0.88B^2 + 1.8B + B = (B + \frac{10}{11})(B + \frac{5}{4}).$$

en

$$\Theta(B) = 0.7B^2 + 0.2B + 1.$$

Er is geen parameter redundancy. Het nulpunt $-\frac{10}{11}$ van Φ ligt binnen de eenheidscirkel, het proces is dus niet causaal.

5. Beschouw het volgende tijdreeksmodel

$$X_t = \delta + X_{t-1} + Z_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

Hierbij veronderstellen we dat $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ en $\{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

- (a) Laat zien dat het model geschreven kan worden als

$$X_t = x_0 + t\delta + \sum_{k=1}^t Z_k.$$

Dit volgt door de vergelijking iteratief toe te passen. Dus

$$\begin{aligned} X_t &= \delta + X_{t-1} + Z_t \\ &= \delta + \delta + X_{t-2} + Z_{t-1} + Z_t \\ &= \dots \\ &= t\delta + x_0 + \sum_{k=1}^t Z_k. \end{aligned}$$

- (b) Bereken de verwachtingsfunctie van X_t (dus $E[X_t]$).

Aangezien $E[Z_t] = 0$ voor alle t volgt dat $E[X_t] = t\delta + x_0$.

- (c) Bereken $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$. Maak onderscheid tussen de gevallen $h \geq 0$ en $h < 0$.
Beschouw eerst $h \geq 0$. Dan

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= E \left[\sum_{k=1}^t Z_k \sum_{\ell=1}^{t+h} Z_\ell \right] \\ &= \sum_{k=1}^t \sum_{\ell=1}^{t+h} \text{Cov}(Z_k, Z_\ell) \\ &= \sum_{k=1}^t \text{Var}(Z_k) = t\sigma^2.\end{aligned}$$

Voor $h < 0$ vinden we op vergelijkbare wijze

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = (t-h)\sigma^2.$$

- (d) Is $\{X_t\}$ een stationaire tijdreeks? Lig je antwoord toe.

Nee, $E[X_t]$ hangt af van t . Hetzelfde geldt voor $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$.

6. Stel dat $\{Z_t\} \sim \text{IID } N(0, 1)$ en dat $\{A_t\}$ en $\{Y_t\}$ stationaire processen zijn gedefinieerd door

$$A_t = Z_t \sqrt{7 + 0.5A_{t-1}^2}$$

en

$$Y_t = 2 + \frac{2}{3}Y_{t-1} + A_t$$

- (a) Geef de ACF van het proces $\{A_t\}$; dus de functie $h \mapsto \rho_A(h)$ (het is hier dus niet de bedoeling dat je iets gaat simuleren). *Hint: wat voor type tijdreeks is $\{A_t\}$?*

$\{A_t\}$ is een ARCH(1)-proces, en dus is het white-noise. Dit geeft $\rho_A(h) = 1$ als $h = 0$ en 0 anders.

- (b) Geef de ACF van het proces $\{Y_t\}$; dus de functie $h \mapsto \rho_Y(h)$.

$\{Y_t\}$ is een AR(1)-proces, aangezien $\{A_t\} \sim \text{WN}$

Aangezien $\alpha = 0.5 < 1/\sqrt{3}$ bestaat de kurtosis van $\{A_t\}$, en deze is groter dan die van $\{Z_t\}$. Het proces heeft dus zwaardere staarten dan die van de Normale verdeling.

- (c) Stel dat we een realisatie van de tijdreeks $\{A_t\}$ simuleren. Wat verwacht je te zien bij het plaatje van partiële autocorrelaties van de tijdreeks $\{A_t^2\}$?

$\{A_t^2\} \sim \text{AR}(1)$, dus de partiële autocorrelatie is nul voor lags groter dan 1.

7. Bekijk de volgende R output, verkregen door een tijdreeksmodel op de tijdreeks x te fitten.

```
Series: x
ARIMA(1,0,2) with zero mean

Coefficients:
          ar1          ma1          ma2
      0.6574   -0.4522   0.5280
s.e.  0.0455    0.0474   0.0407

sigma^2 estimated as 0.04063:  log likelihood=90.77
AIC=-173.54   AICc=-173.46   BIC=-156.68
```

Geef de modelvergelijkingen op grond van deze output.

Dit betreft een ARMA(1, 2) model.

$$X_t = 0.66X_{t-1} + Z_t - 0.45Z_{t-1} + 0.53Z_{t-2},$$

met $\{Z_t\} \sim \text{IID } N(0, 0.04)$.

8. Geef tenminste 2 methoden om een tijdreeks te “detrenden”, m.a.w. om de trend eruit te halen.

Zie boek/slides.