

# Tentamen Redeneren en Logica (TI1306), 9:00 – 10:30

- Tip: Bedenk eerst wat het antwoord op een meerkeuzevraag moet zijn, en zoek dan dat antwoord op.

## Meerkeuzevragen (1 punt per vraag)

1. Als  $P$  en  $Q$  eigenschappen van paren gehele getallen zijn, op welke manier kun je dan deze stelling bewijzen?

**Stelling.** Voor alle  $x \in \mathbb{Z}$  bestaat er een  $y \in \mathbb{Z}$  zodat  $P(x, y) \rightarrow Q(x, y)$ .

- A. Neem een willekeurige  $x \in \mathbb{Z}$  en vind een  $y \in \mathbb{Z}$  (mogelijkerwijs afhankelijk van  $x$ ) waarvoor geldt dat uit de aanname dat  $P(x, y)$  onwaar is, volgt dat  $Q(x, y)$  onwaar is.
- B. Vind een  $y \in \mathbb{Z}$  en laat voor een willekeurige  $x \in \mathbb{Z}$  zien dat  $P(x, y)$  volgt uit de aanname van  $Q(x, y)$ .
- C. Neem een willekeurige  $x$  en  $y$  in  $\mathbb{Z}$  en laat zien dat  $Q(x, y)$  volgt uit de aanname van  $P(x, y)$ .
- ☒ D. Neem een willekeurige  $x \in \mathbb{Z}$  en vind een  $y \in \mathbb{Z}$  (mogelijkerwijs afhankelijk van  $x$ ) waarvoor je laat zien dat uit de aanname dat  $Q(x, y)$  onwaar is, volgt dat  $P(x, y)$  onwaar is.

2. Als je de volgende stelling bewijst met volledige inductie, wat moet je dan doen in de inductiestap?

**Stelling.** Voor alle gehele getallen  $n \geq 1$  geldt:  $6 \mid (n^3 - n)$ .

- A. Vind een geheel getal  $k$  waarvoor een geheel getal  $a$  bestaat zodat  $(k^3 - k) = a \cdot 6$ , en laat zien dat voor een willekeurig geheel getal  $b$  geldt  $((k+1)^3 - (k+1)) = b \cdot 6$ .
- B. Laat voor een willekeurig geheel getal  $k$  zien dat als er een geheel getal  $a$  bestaat zodat  $((k+1)^3 - (k+1)) = a \cdot 6$ , er een geheel getal  $b$  bestaat zodat  $(k^3 - k) = b \cdot 6$ .
- C. Laat zien dat als er, wanneer  $n = 1$ , een geheel getal  $a$  bestaat zodat  $(n^3 - n) = a \cdot 6$ , er ook een geheel getal  $b$  bestaat zodat  $((n+1)^3 - (n+1)) = b \cdot 6$ .
- ☒ D. Laat zien dat als voor een willekeurig geheel getal  $k$ , er een geheel getal  $a$  bestaat zodat  $(k^3 - k) = a \cdot 6$ , er een geheel getal  $b$  bestaat zodat  $((k+1)^3 - (k+1)) = b \cdot 6$ .

3. Als  $A$ ,  $B$  en  $C$  verzamelingen in universum  $U$  zijn, en  $D = ((A \cup B)^c \cap (C - A))$ , wat is dan **niet** waar?

- ☒ A.  $(A \cap B) \subseteq (C - D)$ .
- B.  $D \subseteq B^c$ .
- C.  $(A \cap B) \cap D = \emptyset$ .
- D.  $C^c \subseteq D^c$ .

4. Als  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  en  $W$  verzamelingen zijn, hoe kun je dan de uitspraak "Als  $X \subseteq Y$ , dan  $Z \subseteq W$ " bewijzen?

- ☒ A. Door te laten zien dat  $Z \subseteq X$  en dat  $Y \subseteq W$ .
- B. Door te laten zien dat  $Y \subseteq Z$  en dat  $W \subseteq X$ .
- C. Door te laten zien dat  $X \subseteq Z$  en dat  $Y \subseteq W$ .
- D. Door te laten zien dat  $Z \subseteq X$  en dat  $W \subseteq Y$ .

5. Laat  $A$  en  $B$  verzamelingen zijn waarvoor geldt  $A \subseteq B$ . Wat kunnen we dan **niet** met zekerheid zeggen?

- A. Als  $B = \emptyset$  dan  $A = \emptyset$ .
- ☒ B.  $|A| < |B|$ .
- C. Als  $A \neq \emptyset$  dan  $B \neq \emptyset$ .
- D.  $(A - B) = \emptyset$ .

6. De volgende redenering is niet waar. Welke verzamelingen vormen een tegenvoorbeeld?

**Redenering.** Voor alle verzamelingen  $A$  en  $B$  geldt:  $2^A \cup 2^B = 2^{A \cup B}$ .

- A.  $A = \emptyset$  en  $B = \{a, b\}$ .
- B.  $A = \{a, b\}$  en  $B = \{a\}$ .
- ☒ C.  $A = \{a\}$  en  $B = \{b\}$ .
- D.  $A = \{\emptyset\}$  en  $B = \emptyset$ .

7. Beschouw de gerichte graaf die correspondeert met een relatie  $R$  op een verzameling  $A$ . Als gegeven is dat de relatie  $R$  **wel** reflexief en **niet** symmetrisch is, wat moet dan waar zijn?
- A. (i) Als er een pijl loopt van een knoop naar een andere knoop, dan loopt er geen pijl terug, en (ii) er loopt een pijl van elke knoop naar zichzelf.
  - B. (i) Niet alle knopen hebben een pijl naar zichzelf, en (ii) als er een pijl loopt van een knoop naar een andere knoop, dan loopt er ook een pijl terug.
  - C. (i) Er lopen geen pijlen tussen paren knopen, maar (ii) er loopt een pijl van elke knoop naar zichzelf.
  - ☒ D. (i) Er is een pijl van een knoop naar een andere knoop, zonder dat er een pijl terug loopt, en (ii) er loopt een pijl van elke knoop naar zichzelf.
8. Beschouw de volgende relatie  $T$  op  $\mathbb{Z}$ : Een paar  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  zit in  $T$  desda  $x \mid 2y$ . Wat is waar?
- A. De relatie  $T$  is wel reflexief, en wel symmetrisch.
  - ☒ B. De relatie  $T$  is wel reflexief, en niet symmetrisch.
  - C. De relatie  $T$  is niet reflexief, en wel symmetrisch.
  - D. De relatie  $T$  is niet reflexief, en niet symmetrisch.
9. De functies  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zijn gegeven als  $f(x) = 3x^3 + 1$  en  $g(x) = 2x^2 + 6x - 5$ . Wat is waar?
- A. De functie  $f$  is injectief en de functie  $g$  is injectief.
  - B. De functie  $f$  is injectief en de functie  $g$  is niet injectief.
  - C. De functie  $f$  is niet injectief en de functie  $g$  is injectief.
  - ☒ D. De functie  $f$  is niet injectief en de functie  $g$  is niet injectief.
10. Beschouw opnieuw de functies  $f$  en  $g$  van vraag 9. Wat is waar?
- A. De functie  $f$  is surjectief en de functie  $g$  is surjectief.
  - ☒ B. De functie  $f$  is surjectief en de functie  $g$  is niet surjectief.
  - C. De functie  $f$  is niet surjectief en de functie  $g$  is surjectief.
  - D. De functie  $f$  is niet surjectief en de functie  $g$  is niet surjectief.

## Open vragen

1. Beschouw de volgende redeneringen, waar  $2^X$  de machtsverzameling van verzameling  $X$  is. (Voor alle duidelijkheid: Epp schrijft in haar boek  $2^X$  als  $\mathcal{P}(X)$ .)

**Redenering (I).** Voor alle verzamelingen  $A$  en  $B$  geldt:  $2^{A-B} \not\subseteq (2^A - 2^B)$ .

**Redenering (II).** Voor alle verzamelingen  $A$  en  $B$  geldt:  $(2^A - 2^B) \not\subseteq 2^{A-B}$ .

Redenering I is **geldig**, en redenering II is **niet geldig**.

- (a) (1 punt) Geef voor verzamelingen  $C = \{0, 1\}$  en  $D = \{1\}$  de verzamelingen  $2^{C-D}$  en  $(2^C - 2^D)$  als opsommingen van elementen (in 'set-rooster notatie' dus).
- (b) (2 punten) Geef een bewijs voor redenering I. Wees expliciet over de bewijstechnieken die je gebruikt, en verantwoord al je stappen. (Je krijgt de punten voor deze vraag als je bewijs je *begrip* van deze materie toont.)
- (c) i. (1 punt) Geef een tegenvoorbeeld dat aantoont dat redenering II niet geldig is.  
ii. (1 punt) Leg duidelijk en precies uit hoe je tegenvoorbeeld de ongeldigheid aantoont.

2. (5 punten) Bewijs met volledige inductie dat voor alle gehele  $n \geq 1$  geldt:  $\sum_{i=1}^n (i \cdot i!) = (n+1)! - 1$ .

Tip: Zorg ook hier voor een bewijs dat je *inzicht* toont in de werking van een inductiebewijs: Zorg dat wat je inlevert onomstotelijk laat zien dat je begrijpt hoe en waarom zo'n bewijs *werkt*! Wees vooral royaal met begeleidende tekst en uitleg.