
Normering: opgave 1 en 2 zijn elk 3 punten waard
opgave 3 en 4 zijn elk 2 punten waard

- 1 De pseudo-randomgenerator van matlab kent het commando `rand` voor de $U(0,1)$ stochast. Gebruik deze randomgenerator in de volgende opgave.

A Schrijf pseudo-code om de volgende integraal te berekenen via standaard Monte Carlo:

$$\int_0^1 \frac{\sin(1-x^2)}{\sqrt[3]{x}} dx$$

B Pas de pseudo-code aan om de integraal te berekenen met antithetische variaten.

C De integraal in A is op te vatten als de verwachting van X , die verdeeld is als $\frac{\sin(1-U^2)}{\sqrt[3]{U}}$ voor een uniform verdeelde stochast U . Welke stochast Y komt in aanmerking als controlevariaat? Wat is de verwachting van Y ?

- 2 A Verdeel de positieve reële rechte in intervallen van vaste lengte c : $[0,c)$, $[c,2c)$, $[2c,3c)$, etc. Nummer deze intervallen 1,2,3, .. enz. Laat X een exponentieel verdeelde stochast zijn en laat N het interval zijn waarin X terecht komt, dus $(N-1)c \leq X < Nc$. Toon aan dat N een geometrisch verdeelde stochast is.
- B Welke c moet je kiezen zodat N een geometrische stochast $Geo(0.5)$ is, m.a.w., het aantal keer gooien met een zuivere munt totdat je kop gooit.
- C Geef pseudo-code om de pseudo-randomgenerator `rand` om te werken naar een generator van een $Geo(0.5)$ stochast.

- 3 A Stel dat de stochast V afhangt van een parameter p en dat we willen berekenen

$$\frac{\mathbb{E}[V(p+h)] - \mathbb{E}[V(p)]}{h}$$

voor een klein increment h . Beschouw de volgende twee Monte Carlo benaderingen:

Methode 1

- (a) Pas Monte Carlo toe om $A \approx \mathbb{E}[V(p+h)]$ te berekenen.
- (b) Pas Monte Carlo toe om $B \approx \mathbb{E}[V(p)]$ te berekenen, via een nieuwe aanroep van de pseudo-randomgenerator.
- (c) Bereken $(A - B)/h$.

Methode 2

- (a) Pas Monte Carlo toe om $C \approx \mathbb{E}[V(p+h) - V(p)]$ te berekenen.
- (c) Bereken C/h .

Leg uit waarom Methode 2 te prefereren is.

- B Ik wil de verwachting $\mathbb{E}[X]$ berekenen met Monte Carlo. Ik gebruik de controlvariaat Y met $Var(Y) = 2$ en $Cov(X, Y) = 1$. Bepaal de optimale keuze van θ in

$$Z_\theta = X + \theta(\mathbb{E}[Y] - Y)$$

door de variantie van deze stochast Z_θ te minimaliseren.

- 4 A Geef een voorbeeld waarin de antithetische variaten *minder efficiënt* zijn dan standaard Monte Carlo.
- B Ik heb twee strings van 180 nullen en enen uit mijn computer gehaald, te weten

String A

001000100001011011010100101000100100110000011101000000000011100011100110000101010001101011
10000011000000111001111010001001111011101101010000011101110010011110010111110011010110001

String B

1010001010001010001110001111001011101110100010100010101010101000011110111000111000101100
111110001100101000111000011010001010101010111100111100011100101110101000101110011010111000

De ene string komt uit de pseudo-randomgenerator voor een zuivere munt, de andere heb ik zelf verzonnen. Welke string is random en waarom? Geef een kwantitatief antwoord.