

Tentamen

Mechanica en Relativiteitstheorie voor TW

21 april 2017, 09:00-12:00h

1. Schrijf je naam en studentnummer op elk antwoordenvel.
2. Leg altijd je antwoorden uit. Geef daarbij de structuur van je antwoord en de tussenstappen goed aan.
3. Gebruik voor tekeningen een liniaal / geodriehoek, en maak ze niet te klein - je hebt papier genoeg.
4. Het tentamen bestaat uit 6 opgaven. Voor elke opgave staat het maximale aantal te behalen punten aangegeven. Je kunt in totaal 22 punten scoren.
5. Op de laatste pagina staan een aantal natuurconstanten en formules.

Succes!

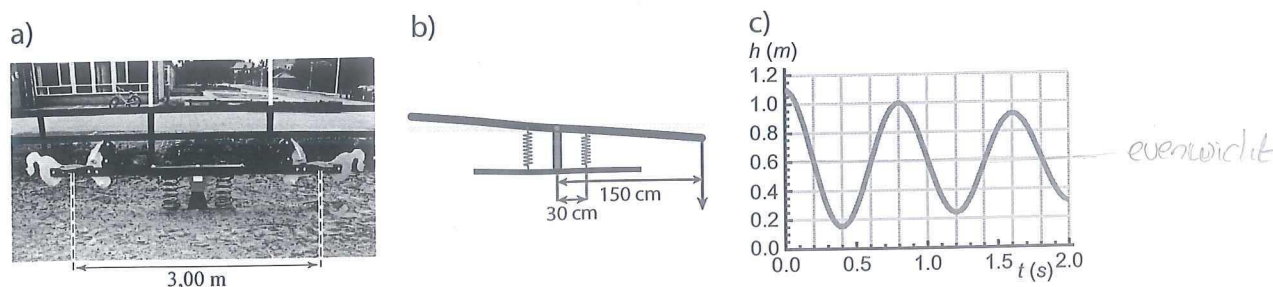
1 Kennisvragen - 4 punten

- (a) Geef de definitie van een inertiaalstelsel. Formuleer je antwoord zo, dat een studentgenoot die dit vak niet heeft gevolgd het kan begrijpen.
- (b) Geef de twee postulaten van Einstein die de grondslag vormen voor de speciale relativiteitstheorie.

Geef een definitie (niet alleen een voorbeeld!) van

- (c) Een volledig elastische botsing (klassiek en relatief).
- (d) Precessie.

2 Een wipwap met twee veren - 4 punten



Figuur 1: Wipwap met twee identieke veren (opgave 2). a) Foto en (b) schematische weergave van de wipwap. De stoeltjes zitten 3.00 m uit elkaar, de veren zitten 30.0 cm van het draaipunt. c) Hoogte van een stoeltje als functie van de tijd in opgave.

In figuur 1 zie je een wipwap zoals je die in moderne speeltuintjes vaak aantreft. In aanvulling op een stok met stoeltjes bevat deze wipwap twee identieke veren die op gelijke afstand van het draaipunt zijn gemonteerd. In onze voorbeeldwipwap zitten de veren op 30.0 cm van het draaipunt, en de stoeltjes op 1.50 m van het draaipunt.

- (a) Een kind van 20.0 kg gaat op een van de stoeltjes zitten, waardoor het stoeltje 20.0 cm naar beneden zakt. Maak een vrij-lichaamsdiagram van deze situatie, en teken daarin alle relevante krachten.

- (b) Bereken aan de hand van de gegevens hierboven de veerconstante van de twee veren.

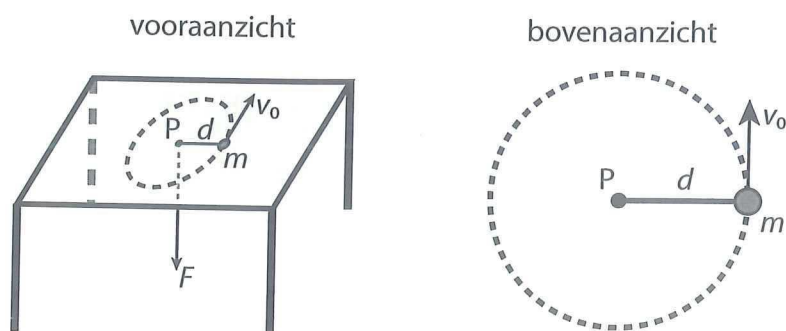
Een tweede kind gaat op het andere stoeltje zitten. De twee kinderen zetten zich een paar keer tegen de grond af, waardoor ze de wipwap in een oscillerende beweging brengen met een amplitude van 50.0 cm. Op $t = 0$ stoppen ze met afzetten; de hoogte van een van de stoeltjes als functie van de tijd is daarna weergegeven in figuur 1c.

- (c) Karakteriseer (kwalitatief), aan de hand van figuur 1c, de beweging van de wipwap nadat de kinderen stoppen met afzetten.

- (d) De wipwap met twee kinderen erop kan worden gemodelleerd als een simpel massa-veer systeem, met een veerconstante die gelijk is twee maal die van een individuele veer. Maak aan de hand van figuur 1c een schatting van de effectieve massa van dit massa-veersysteem.

- (e) De twee kinderen zetten zich weer af tegen de grond, zodat ze na verloop van tijd weer bewegen met een amplitude van 50 cm. Met het gebruikte model van het massaveersysteem is de extra energie te berekenen die de kinderen daarbij gedurende één trillingstijd moeten leveren. Maak met behulp van figuur 1c een schatting van deze extra energie per trilling.

3 Massa aan een koord - 3 punten



Figuur 2: Een puntmassa m beweegt over een vlakke tafel (opgave 3) en beweegt daarover zonder fictie. De massa zit vast aan een touw, dat door een gat (bij punt P) in de tafel loopt.

Over een vlakke tafel met een klein gat in het midden beweegt een puntmassa m . De puntmassa is vastgemaakt aan een massaloos koord dat door het gat loopt. Op $t = 0$ is de afstand van de massa tot het gat (bij punt P) gelijk aan d en heeft de massa een snelheid v_0 , die loodrecht staat op de verbindinglijn tussen m en P (zie figuur 2). De massa kan zonder wrijving over de tafel bewegen. We trekken het koord langzaam door het gat.

- Welke krachten werken er op de massa?
- Toon aan dat het impulsmoment van de massa behouden is.
- Bepaal de snelheid van de massa als functie van de afstand tot P. (NB: het gaat hier om de grootte van de snelheid, met richting loodrecht op het koord; dat is dus strikt genomen de snelheid van de puntmassa voor het geval dat je het koord tijdelijk niet verder trekt).
- Op zeker moment $t > 0$ (willekeurig gekozen) wordt het koord doorgeknipt. Beschrijf kwalitatief de baan die de puntmassa daarna volgt en toon aan dat ook voor deze baan het impulsmoment nog steeds behouden is. Hoe groot is dit impulsmoment?

4 Relativiteit - 2 punten

Een bekende (maar waarschijnlijk apocriefe) aan Einstein toegeschreven uitspraak is "Sit on a hot stove for five minutes, and it feels like an hour. Talk to a pretty girl for an hour, and it feels like five minutes. *That's* relativity."

- Einstein zit (in rust, stelsel S) vijf minuten op hete kolen. Is er een bewegend stelsel S' waarin dit een uur lijkt te duren? Zo ja, bepaal de snelheid van dat stelsel, zo nee, leg uit waarom niet.

- (b) Einstein praat een uur met Marilyn Monroe¹ terwijl ze beiden stilstaan in stelsel S. Is er een bewegend stelsel S' waarin dit vijf minuten lijkt te duren? Zo ja, bepaal de snelheid van dat stelsel, zo nee, leg uit waarom niet.

5 Ontsnapping in de ruimte - 5 punten

Een vijandige alien aan boord van de Enterprise probeert aan captain Kirk en zijn bemanning te ontsnappen. Hiertoe gaat de alien aan boord van een shuttle en vertrekt met snelheid $v = \frac{3}{4}c$. In zijn achteruitkijkspiegel ziet hij dat de bemanning van de Enterprise een van de zware lasers op hem richt. Daarom laat hij zich wegschieten van zijn shuttle met een snelheid $\frac{1}{2}c$, in dezelfde richting als de shuttle. De alien heeft duidelijk de verkeerde studie gevolgd.

- (a) Bereken de snelheid van de alien zoals geobserveerd door captain Kirk en toon aan dat de alien toch geraakt gaat worden door de laser.
- (b) Neem aan dat het één tijdseenheid duurt om de laser te richten, en nog één om hem te laden voordat hij kan vuren. De alien laat zich van zijn shuttle wegschieten op het moment dat hij ziet (dwz dat het licht van deze gebeurtenis hem bereikt heeft) dat de laser op hem gericht staat. Teken in een ruimte-tijddiagram in het ruststelsel van de Enterprise het pad van de alien en dat van de laserstraal. Neem als eenheden op de ct en de x as de waarde van c keer een tijdseenheid. NB: Neem de ruimte voor dit ruimte-tijddiagram - teken het op een losse bladzijde, met de ruimte-as onderaan. Gebruik bij het tekenen een geodriehoek of liniaal, en zorg ervoor dat de relevante hoeken correct zijn.
- (c) Na hoeveel tijd (op zijn horloge) ziet kapitein Kirk het licht van de explosie waarbij de alien het loodje legt?

6 Twee relativistische botsingen - 4 punten

- (a) Twee fotonen hebben allebei dezelfde energie E_f . Ze botsen met elkaar onder een hoek θ , waarbij een deeltje met massa M ontstaat. Wat is M ?
- (b) Een deeltje met massa m en energie E botst met een identiek deeltje dat stilstaat. Na de botsing zijn er N deeltjes met massa m ontstaan. Wat is de minimale energie E (de 'threshold energy') van het eerste deeltje waarvoor dit proces kan plaatsvinden?

¹Volgens een andere anekdote zou Marilyn Monroe in dit gesprek tegen Einstein gezegd hebben "If we were to have children, and they'd have your brains and my looks, wouldn't that be fantastic?", waarop Einstein antwoordde "Yes, but what if they'd have your brains and my looks?"

Enkele formules en natuurconstanten

Naam	Symbol	Waarde
Lichtsnelheid	c	$3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Elementaire lading	e	$1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Massa electron	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Massa proton	m_p	$1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Gravitatieconstante	G	$6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
Valversnelling	g	9.81 m/s^2
Constante van Planck	h	$6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
	$\hbar = h/2\pi$	$1.05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Tabel 1: Natuurconstanten

Object	Traagheidsmoment
Dunne staaf (lengte L)	$\frac{1}{12} ML^2$
Ring of holle cilinder (straal R)	MR^2
Schijf of massieve cilinder (straal R)	$\frac{1}{2} MR^2$
Holle bol (straal R)	$\frac{2}{3} MR^2$
Massieve bol (straal R)	$\frac{3}{5} MR^2$
Rechthoek (zijdes a, b), loodrechte as	$\frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$
Rechthoek (zijdes a, b), as parallel aan zijde b	$\frac{1}{12} Ma^2$

Tabel 2: Traagheidsmomenten, alle om (symmetrie)assen door het massamiddelpunt.

Vectorafgeleiden

Gradiënt:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right).$$

Divergentie:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Rotatie (curl):

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}.$$

Lorentz transformaties voor de coördinaten van een frame S' dat beweegt met snelheid u in de positieve x -richting in frame S :

$$x' = \gamma(u) \left(x - \frac{u}{c} ct \right) \quad (1)$$

$$ct' = \gamma(u) \left(ct - \frac{u}{c} x \right) \quad (2)$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (3)$$