

Midterm - oplossingen

Mechanica en Relativiteitstheorie voor TW

13 maart 2017

1. Schrijf je naam en studentnummer op elk antwoordenvel.
2. Leg altijd je antwoorden uit. Geef daarbij de structuur van je antwoord en de tussenstappen goed aan.
3. Gebruik voor tekeningen een lineaal / geodriehoek, en maak ze niet te klein - je hebt papier genoeg.
4. Het tentamen bestaat uit 6 opgaven. Voor elke opgave staat het maximale aantal te behalen punten aangegeven. Je kunt in totaal 24 punten scoren.
5. Op de laatste pagina staan een aantal natuurconstanten en formules.

Succes!

1 Kennisvragen - 6 punten

- (a) Geef de drie behoudswetten uit de klassieke mechanica, en geef aan onder welke omstandigheden ze geldig zijn.

Geef een definitie (niet alleen een voorbeeld!) van

- (b) Een conservatieve kracht.
- (c) Een onstabiel evenwicht.
- (d) Impulsmoment (angular momentum).

Antwoorden:

- (a)
- Behoud van energie; geldt als alle krachten in het systeem conservatief zijn [1 pt].
 - Behoud van impuls; geldt als er geen externe krachten op het systeem werken [1 pt].
 - Behoud van impulsmoment (of 'draaimoment'); geldt als er geen externe krachtmomenten op het systeem werken [1 pt].

[0.5 pt per item als alleen de behoudswet en niet de voorwaarde (correct) gegeven is].

- (b) Een kracht waarvoor de verrichte arbeid tussen twee punten onafhankelijk is van het gekozen pad tussen die punten [1 pt].
- (c) *Mogelijkheid 1:* Een (lokaal) maximum in de potentiële energie [1 pt].
Mogelijkheid 2: Een punt waarop de nettokracht op een systeem nul is, maar waarvoor geldt dat een willekeurig kleine afwijking van dit punt leidt tot een nettokracht die ervoor zorgt dat het systeem uit dit evenwicht gedreven wordt [1 pt].
- (d) Het rotatie-equivalent van impuls, gegeven door het uitproduct van de positievector (of: de arm) en de impulsvector [1 pt].

2 Planck eenheden - 3 punten

Naast de natuurwetten zoals de bewegingswetten van Newton en de verschillende krachtwetten, die we in mechanica als axioma's aannemen, nemen we (impliciet) ook aan dat er een aantal natuurconstanten zijn. Voorbeelden uit dit vak zijn de lichtsnelheid c en de gravitatieconstante van Newton G (hun getalswaarden staan in de tabel op de laatste pagina); een voorbeeld uit de quantummechanica is de constante van Planck $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. In de hoge-energiefysica (denk aan de deeltjesversneller op CERN) heeft men te maken met processen die plaatsvinden op hele kleine tijd- en lengteschalen, waarbij de gebruikelijke SI-eenheden meters en seconden niet erg handig zijn. In plaats daarvan gebruiken ze eenheden gebaseerd op de waarden van deze drie natuurconstanten.

Combineer c , G en $\hbar$ in een grootheid met de dimensie van tijd (deze grootheid staat bekend als de Planck-tijd).

Oplossing:

Methode 1: We hebben $[c] = L/T$, $[G] = F/(M^2/L^2) = MLT^{-2} \cdot L^2M^{-2} = L^3M^{-1}T^{-2}$, $[\hbar] = E \cdot T = ML^2T^{-1}$ [1 pt]. We willen een grootheid met de dimensie van tijd, dus moeten we hebben:

$$T = [c]^\alpha [G]^\beta [\hbar]^\gamma = L^\alpha T^{-\alpha} L^{3\beta} M^{-\beta} T^{-2\beta} M^\gamma L^{2\gamma} T^{-\gamma} = L^{\alpha+3\beta+2\gamma} M^{\gamma-\beta} T^{-\alpha-2\beta-\gamma}$$

[0.5 pt] ofwel

$$0 = \alpha + 3\beta + 2\gamma, \quad 0 = \gamma - \beta, \quad 1 = -(\alpha + 2\beta + \gamma)$$

[0.5 pt]. Hieruit volgt dat $\beta = \gamma$, $\alpha = -(3\beta + 2\gamma) = -5\beta$ en $1 = 5\beta - 2\beta - \beta$, dus $\beta = 1/2$, $\gamma = 1/2$ en $\alpha = -5/2$ [0.5 pt] en onze gezochte Planck tijd is

$$t_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$$

[0.5 pt].

Methode 2: We hebben $[c] = L/T$, $[G] = F/(M^2/L^2) = MLT^{-2} \cdot L^2M^{-2} = L^3M^{-1}T^{-2}$, $[\hbar] = E \cdot T = ML^2T^{-1}$ [1 pt]. We zien dat G en $\hbar$ een massa bevatten en c niet, terwijl de gewenste combinatie geen massa bevat (want die is een tijd), dus moet de Planck-tijd afhangen van $G\hbar$ [0.5 pt], deze combinatie heeft dimensie $[G\hbar] = L^5T^{-3}$ [0.5 pt]. Omdat de Planck-tijd ook niet mag afhangen van de lengte, moeten we de vijfde macht van de

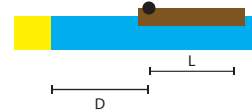
tijd in de noemer van $[G\hbar]$ compenseren met een macht van c , die zelf lineair is in de lengte. De combinatie die we moeten hebben is dus $G\hbar/c^5$ met dimensie $[G\hbar/c^5] = T^2$ [0.5 pt]. Om een tijd te krijgen moeten we hiervan de wortel trekken, dus de gezochte Planck lengte is

$$t_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$$

[0.5 pt].

3 Een hond in een boot - 2 punten

Een hond (zwarte punt in de figuur rechts) met massa m staat aan het eind van een boot met massa M en lengte L op een afstand D van de kade. De hond loopt naar het andere eind van de boot en stopt daar. Hoe ver is de hond dan van de kade verwijderd? (Hint: wat is er hier behouden?)



Figuur 1: Een hond in een boot.

Oplossing:

Omdat er geen externe krachten op het systeem werken is de totale impuls behouden, en in het bijzonder de positie van het massamiddelpunt [0.5 pt]. We berekenen het massamiddelpunt t.o.v. de kade in de situatie voordat en nadat de hond door de boot loopt. We noemen de nieuwe afstand tussen de hond en de kade x .

Voor: $x_{\text{cm}} = [M(D + L/2) + mD]/(m + M)$ [0.5 pt].

Na: $x_{\text{cm}} = [M(x - L/2) + mx]/(m + M)$ [0.5 pt].

Omdat de positie van het massamiddelpunt niet verandert, moeten de twee uitdrukkingen hetzelfde antwoord geven, dus vinden we:

$$MD + \frac{1}{2}ML + mD = Mx - \frac{1}{2}ML + mx$$

$$x = \frac{M(D + L) + mD}{m + M}$$

[0.5 pt].

4 Rollende cilinder - 3 punten

Een massieve cilinder met massa m , straal r en traagheidsmoment $I = \frac{1}{2}mr^2$ rolt zonder te slippen van een helling met hellingshoek θ . De beginsnelheid van de cilinder is nul.

- Druk de lineaire snelheid v van de cilinder uit in de afstand d die hij gerold heeft over de helling.
- Bepaal de lineaire versnelling van het middelpunt van de cilinder.

Oplossing:

- (a) Voor de rollende cilinder geldt $v = \omega R$ [0.5 pt]. We passen behoud van energie toe: potentiële (zwaarte)-energie ($U = mgh = mgd \sin \theta$) wordt omgezet in kinetische energie van de rollende cilinder: $K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR^2)(v/R)^2 = \frac{3}{4}mv^2$ [0.5 pt], dus $v = \sqrt{\frac{4}{3}gd \sin \theta}$ [0.5 pt].
- (b) *Methode 1:* Omdat de krachten op de cilinder constant zijn, is ook de versnelling constant [0.5 pt]. Voor constante versnelling a hebben we $v = \sqrt{2ad}$ met d de lengte van de afgelegde weg [0.5 pt]. Invullen van de snelheid van (a) geeft $a = \frac{2}{3}g \sin \theta$ [0.5 pt].
- Methode 2:* Omdat de krachten op de cilinder constant zijn, is ook de versnelling constant [0.5 pt]. De afgelegde weg wordt dan gegeven door $d(t) = d(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2$, wat hier met $d(0) = v(0) = 0$ versimpelt tot $d(t) = \frac{1}{2}at^2$ [0.25 pt]. De snelheid voor constante versnelling (met $v(0) = 0$) is $v(t) = at$, dus $t = v(t)/a$ [0.25 pt]. Invullen van t in de uitdrukking voor $d(t)$ en de waarde van v uit (a) geeft $d = \frac{1}{2}a(v/a)^2 = \frac{1}{2} \frac{4}{3}gd \sin \theta / a$ [0.25 pt], ofwel $a = \frac{2}{3}g \sin \theta$ [0.25 pt].

5 Opwaartse kracht - 5 punten

Voorwerpen met een (gemiddelde) dichtheid kleiner dan die van water blijven drijven, en ook objecten met een grotere dichtheid zijn ‘lichter’ in het water. De kracht die hiervoor verantwoordelijk is volgt uit het principe van Archimedes, en staat bekend als de *opwaartse kracht*, die even groot maar tegengesteld gericht is aan de zwaartekracht op het verplaatste water:

$$F_{\text{opwaarts}} = \rho_w g V_w,$$

waar ρ_w de dichtheid van het water is en V_w het verplaatste volume. We beschouwen een rechthoekig blok hout met dichtheid $\rho < \rho_w$ dat in het water drijft.

- (a) Hoe groot (als fractie van het geheel) is het deel van het blok hout dat in evenwicht onder water drijft?
- (b) We duwen nu het blok hout met de hand wat verder onder water, en laten daarna los. Het blok voert nu een oscillerende beweging uit op het water. Leg uit waardoor dat komt, en bereken de frequentie van de oscillatie.

Oplossing:

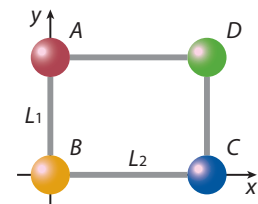
- (a) For a floating object, the gravitational and buoyancy forces balance, so we have $mg = \rho V g = \rho_w V_w g$ [1 pt for correct force balance], and $V_w/V = \rho/\rho_w$, so the fraction of the object's volume that is submerged is ρ/ρ_w [1 pt for correct ratio].
- (b) Let's say the object has a cross-sectional area A and you push it down a depth h . Then the amount of extra water displaced is $V_w = Ah$, and the object feels an additional buoyancy force of $F_b = \rho_w Ahg$, in the direction opposite to the displacement vector [1 pt for the correct additional buoyancy force]. The gravitational force on your object

however remains the same. Consequently, the object experiences a force which scales linearly with displacement h , i.e., an effective spring force, with spring constant $k = \rho_w Ag$, so it will start oscillating when released [1 pt for identifying the effective spring force and conclusion].

Note that the net upward force (i.e., the additional buoyancy force) still has to accelerate the entire floating object, of mass ρV , so the resulting oscillation has a frequency $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\rho_w Ag / \rho V}$ [1 pt for the correct frequency]. Using the result of problem (a), and defining d to be the depth of the submerged part of the object in equilibrium (so $V_w = Ad$), we can also write this frequency as $\omega = \sqrt{\rho_w g / \rho d}$ [Alternative form - not required, but also correct].

6 Een frame met vier ballen - 5 punten

In deze opgave beschouwen we een object dat bestaat uit een frame met vier ballen zoals dat rechts is afgebeeld. De massa van de vier massieve ballen (elk met straal R van 5.0 cm) is $m_A = 3.0$ kg, $m_B = 3.0$ kg, $m_C = 2.0$ kg en $m_D = 1.0$ kg. De staven van het frame (die de randen van de ballen met elkaar verbinden) hebben lengtes $L_1 = 20$ cm en $L_2 = 30$ cm en een lineaire dichtheid $\lambda = 10$ g/cm. (De afstand tussen de middelpunten van ballen A en B is dus 30 cm, en die tussen de middelpunten van B en C is 40 cm). De dikte van de staven is verwaarloosbaar. We gebruiken een xyz -assenstelsel als aangegeven in de figuur, met een z as die in de oorsprong loodrecht uit het papier komt.



Figuur 2: Een frame met vier massieve ballen.

- Bereken de positie van het massamiddelpunt van het object.
- Bereken het traagheidsmoment van het object met betrekking tot rotaties om de y -as.
- We roteren het object met een krachtmoment van 10 Nm om de y -as. Bereken de grootte van de resulterende hoekversnelling.
- Bereken het traagheidsmoment van het object met betrekking tot rotaties om een as door zijn massamiddelpunt, evenwijdig aan de z -as (dus loodrecht op het papier).

Oplossing:

- Het massamiddelpunt van het frame (alleen de staven) ligt op (20 cm, 15 cm) [0.5 pt]. De massa van het frame is $2\lambda(L_1 + L_2) = 2 \cdot 10 \cdot 50 = 1000$ g = 1.0 kg. De totale massa van het object is 10.0 kg [0.5 pt], en het massamiddelpunt ligt op:

$$\begin{aligned} (x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}}) &= \frac{1}{10} [1.0 \cdot (20, 15) + 3.0 \cdot (0, 30) + 3.0 \cdot (0, 0) + 2.0 \cdot (40, 0) + 1.0 \cdot (40, 30)] \\ &= \frac{1}{10} (20 + 0 + 0 + 80 + 40, 15 + 90 + 0 + 0 + 30) = (14 \text{ cm}, 13.5 \text{ cm}). \end{aligned}$$

[1.0 pt]

(b) Voor de berekening van het traagheidsmoment moeten we de traagheidsmomenten van acht objecten optellen:

1. Twee massieve ballen (A en B) om hun massamiddelpunt; traagheidsmomenten $I_A = I_B = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{2}{5} \cdot 3.0 \cdot 5.0^2 = 30 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ [0.5 pt].
2. Twee massieve ballen (C en D) om een as parallel aan die om hun massamiddelpunt, maar 40 cm opgeschoven, hiervoor gebruiken we de parallelle-assenstelling: $I_C = \frac{2}{5}mR^2 + md^2 = 20 + 2.0 \cdot 40^2 = 3220 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ en $I_D = 10 + 1.0 \cdot 40^2 = 1610 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ [0.5 pt].
3. Een staaf (tussen A en B) om zijn lange as - vanwege verwaarloosbare dikte heeft deze traagheidsmoment nul [0.25 pt - ook toekennen als correct gebruikt maar niet expliciet genoemd].
4. Twee staven (A→D en B→C) om een punt op 20 cm van de as door hun massamiddelpunt: $I = \frac{1}{12}mL^2 + md^2 = \frac{1}{12}\lambda L_2^3 + \lambda L_2(\frac{1}{2}L_2 + R)^2 = \frac{1}{12} \cdot 0.010 \cdot 30^3 + 0.010 \cdot 30 \cdot 20^2 = 22.5 + 120 = 142.5 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ [0.5 pt].
5. Een staaf (C→D) om een as parallel aan zijn lange as maar 40 cm verderop: $I = 0 + md^2 = 0.010 \cdot 20 \cdot 40^2 = 320 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ [0.5 pt].

De som van deze acht objecten geeft:

$$I_{\text{frame,y-as}} = 2 \cdot 30 + 3220 + 1610 + 0 + 2 \cdot 142.5 + 320 = 5495 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 = 0.55 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

[0.25 pt].

(c) De rotatie-variant van de tweede wet van Newton geeft $\tau = I\alpha$ [0.25 pt], dus

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{10}{0.55} = 18 \text{ rad/s}^2$$

[0.25 pt].