

Tentamen

Mechanica en Relativiteitstheorie voor TW

15 april 2016

1. Gebruik een apart antwoordenvel voor elke vraag.
2. Schrijf je naam en studentnummer op elk antwoordenvel.
3. Lever je antwoordenvellen apart in (leg elk vel op de daartoe bestemde stapel).
4. Leg altijd je antwoorden uit.
5. Op de laatste pagina staan een aantal natuurconstanten en formules.

Succes!

1 Kennisvragen - 10 punten

- (a) Geef de drie behoudswetten van de klassieke mechanica, en geef voor elk van de drie aan onder welke voorwaarde(n) ze gelden.
- (b) Schets en benoem de vier mogelijke typen gedrag van een harmonische oscillator, waarvan de evenwichtsstand ligt op $x = 0$ cm en die op $t = 0$ s wordt losgelaten op $x = 10$ cm met snelheid nul.
- (c) Geef de grootte en richting van de rotatievector van de aarde mbt de rotatie die leidt tot het dag-nachtritme (dus niet de tragere rotatie om de zon).
- (d) Geef de definitie van precessie.
- (e) Beargumenteer (in een paar zinnen) waarom de postulaten van Einstein impliceren dat niets sneller kan gaan dan het licht.
- (f) Geef de definitie van de lichtkegel in de context van ruimte-tijd (ofwel Minkowski) diagrammen.

2 Energie van een elektron - 7 punten

De effectieve potentiële energie van een elektron in een waterstofatoom wordt gegeven door

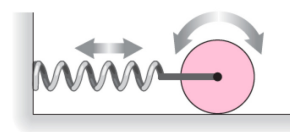
$$U(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}. \quad (1)$$

Hier zijn a en b positieve constanten en r is de afstand tot de oorsprong (waar de kern van het atoom zit).

- Geef de dimensies van a en b .
- Leidt deze potentiële energie tot een afstotende of aantrekkende kracht op kleine afstanden? En op grote afstanden?
- Vind de evenwichtspunt(en) van deze potentiële energie en bepaal hun stabiliteit.
- Een elektron wordt op $r = \infty$ losgelaten met snelheid nul. Bepaal de maximale snelheid die het elektron kan krijgen.
- Voor het elektron in (d), vind de minimale afstand tot de kern (in de oorsprong) die hij kan bereiken.

3 Roterende objecten - 7 punten

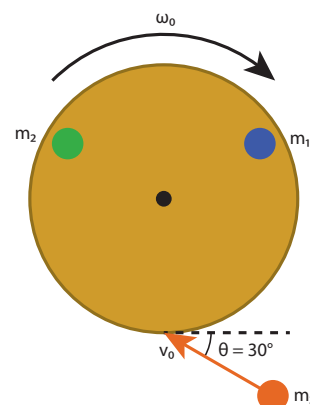
Een massieve cilinder met massa M en straal R is in zijn middelpunt via een veer met veerconstante k verbonden aan de muur (zie figuur 1). De cilinder kan heen en weer rollen zonder te glijden.



- Geef de totale energie van de cilinder plus veer.
- Differentieer de energie van (a) om de bewegingsvergelijking van de cilinder plus veer te vinden.
- Vind de oscillatiefrequentie van de cilinder door de bewegingsvergelijking bij (b) te vergelijken met die van een simpele harmonische oscillator (massa aan een veer).

Figuur 1: Een cilinder aan een veer.

Twee kinderen met massa's $m_1 = 10$ kg en $m_2 = 10$ kg zitten op een simpele draaimolen die bestaat uit een massieve schijf van 100 kg en straal van 2.0 m. De draaimolen kan vrij roteren om zijn middelpunt, en doet dat in eerste instantie met een frequentie ω_0 van 5.0 omwentelingen per minuut. Een derde kind met massa $m_3 = 10$ kg komt aanrennen met een snelheid v_0 van 1.0 m/s, onder een hoek van 30° met de raaklijn aan de draaimolen (zie figuur 2). Bij de draaimolen aangekomen springt dit kind erop, en draait met de andere twee kinderen mee.

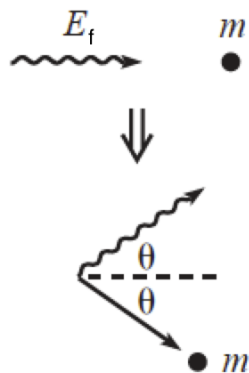


- Vind de rotatiesnelheid van de draaimolen nadat het derde kind erop gesprongen is.

Figuur 2: Drie kinderen en een draaimolen.

4 Een paar relativistische berekeningen - 10 punten

- (a) Een raket vliegt van planeet A naar planeet B die precies een lichtjaar van elkaar liggen (zoals gemeten in het ruststelsel van de planeten). Hoe snel moet de raket vliegen zodat de tijd die tijdens de reis verlopen is op het horloge van een passagier precies een jaar is?
- (b) Een ruimteschip vliegt weg van de aarde met een snelheid $c/2$. Na enige tijd stuurt het ruimteschip een sonde uit onder een rechte hoek met zijn eigen richting, en met een snelheid $c/3$, gemeten in het inertiaalstelsel van het ruimteschip. Wat zijn de grootte en richting van de snelheid van de sonde zoals gemeten vanaf de aarde?
- (c) In de (ct, x) coördinaten van een inertiaalstelsel S vinden drie gebeurtenissen plaats op $G_1 = (1, 2)$, $G_2 = (5, 4)$ en $G_3 = (3, 6)$. Welke van deze gebeurtenissen kunnen causaal met elkaar verbonden zijn?
- (d) Een foton met energie E_f botst elastisch met een een stilstaande massa m . Na de botsing bewegen het foton (met nu onbekende energie) en de massa allebei in een richting die een hoek θ maakt met de oorspronkelijke richting van het foton (zie figuur 3). Geef de energie-impuls viervectoren van het foton en de massa voor en na de botsing.
- (e) Voor dezelfde botsing als in opgave (d), vind de hoek θ van de deeltjes na de botsing (zoals gegeven in figuur 3) in termen van E_f en m .



Figuur 3: Een foton die botst met een stilstaand deeltje van massa m (boven) en de beweging van het foton en het deeltje na de botsing (onder).

Enkele formules en natuurconstanten

Naam	Symbool	Waarde
Lichtsnelheid	c	$3.00 \cdot 10^8$ m/s
Elementaire lading	e	$1.60 \cdot 10^{-19}$ C
Massa electron	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Massa proton	m_p	$1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Gravitatieconstante	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² /kg ²
Valversnelling	g	9.81 m/s ²
Constante van Planck	h	$6.63 \cdot 10^{-34}$ J · s

Tabel 1: Natuurconstanten

Object	Traagheidsmoment
Dunne staaf (lengte L)	$\frac{1}{12}ML^2$
Ring of holle cilinder (straal R)	MR^2
Schijf of massieve cilinder (straal R)	$\frac{1}{2}MR^2$
Holle bol (straal R)	$\frac{2}{3}MR^2$
Massieve bol (straal R)	$\frac{3}{5}MR^2$
Rechthoek (zijdes a, b), loodrechte as	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
Rechthoek (zijdes a, b), as parallel aan zijde b	$\frac{1}{12}Ma^2$

Tabel 2: Traagheidsmomenten, alle om (symmetrie)assen door het massamiddelpunt.

Vectorafgeleiden

Gradiënt:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right).$$

Divergentie:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Rotatie (curl):

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}.$$

Lorentz transformaties voor de coördinaten van een frame S' dat beweegt met snelheid u in de positieve x -richting in frame S :

$$x' = \gamma(u) \left(x - \frac{u}{c} ct \right) \quad (2)$$

$$ct' = \gamma(u) \left(ct - \frac{u}{c} x \right) \quad (3)$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (4)$$