

MechRela voor TW

Hertentamen

22 mei 2015, 14:00-17:00h

1. Gebruik een apart antwoordenvel voor elke vraag.
2. Schrijf je naam en studentnummer op elk antwoordenvel.
3. Lever je antwoordenvellen apart in (leg elk vel op de daartoe bestemde stapel).
4. Leg altijd je antwoorden uit.

Succes!

1 Kennisvragen (10 pt)

(Je mag deze vraag naar keuze in het Nederlands of Engels beantwoorden).

- (a) Formuleer de drie wetten van Newton die de basis vormen van de klassieke mechanica.
- (b) Formuleer de postulaten van de speciale relativiteitstheorie.
- (c) Geef aan onder welke algemene omstandigheden er wrijving ontstaat, en hoe je de (grootte en richting) van de wrijvingskracht bepaalt/berekent.

Geef de definitie of een korte omschrijving (een voorbeeld is niet voldoende) van:

- (d) Inertiaalstelsel.
- (e) Draaimoment (angular momentum).
- (f) Tijdsdilatatie.

2 De Lennard-Jones potentële energie (10 pt)

De Lennard-Jones potentiaal is een veelgebruikt model om de interacties tussen ongeladen atomen en moleculen te beschrijven. Deze potentiële energie kan op twee equivalente manieren geschreven worden:

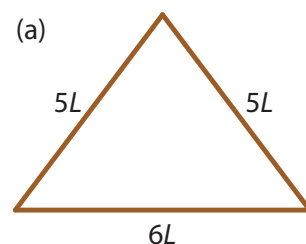
$$U_{\text{LJ}}(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6} = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right], \quad (1)$$

met r de afstand tussen de atomen/moleculen en A , B , ε en σ positieve constanten.

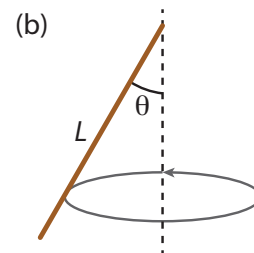
- (a) Bepaal de dimensies van A , B , ε en σ .
- (b) Druk ε en σ uit in A en B .
- (c) Schets de potentiaal als een functie van r/σ in de tweede vorm, en gebruik deze schets om een fysische interpretatie van ε en σ te geven.
- (d) Leidt de Lennard-Jones potentiaal tot aantrekkende of afstotende krachten op korte afstanden? En op lange afstanden?
- (e) Vind alle evenwichtspunten van deze potentiaal, en bepaal hun stabiliteit.

3 Rotaties van een driehoek (9 pt + 3 pt bonus)

We beschouwen een voorwerp in de vorm van een gelijkbenige driehoek met zijden van lengte $5L$, $5L$ en $6L$ (figuur 1a). De driehoek is gemaakt van metalen staven met lineaire dichtheid (massa per eenheid lengte) λ (λ is gerelateerd aan de ‘gewone’ dichtheid ρ als $\lambda = \rho \cdot A$, met A de oppervlakte van de dwarsdoorsnede van de staaf; we nemen hier aan dat de diameter van de staaf veel kleiner is dan zijn lengte).



- (a) Bereken de positie van het massamiddelpunt van de driehoek.
- (b) Bereken het traagheidsmoment (moment of inertia) van de driehoek om zijn symmetrieas. Je mag hierbij gebruiken dat het traagheidsmoment van een staaf met massa m en (totale) lengte $\bar{L}$ om een as door een eindpunt, onder een hoek θ (figuur 1b), gegeven is door $I_{\text{staaf}} = \frac{1}{3}m\bar{L}^2 \sin^2 \theta$.



- (c) Bereken het traagheidsmoment van de driehoek om zijn lange zijde.
- (d) Bepaal tenslotte het traagheidsmoment van de driehoek om een as door zijn massamiddelpunt, loodrecht op het vlak van de driehoek, door gebruik te maken van de stellingen over het traagheidsmoment die we op college afgeleid hebben (geef duidelijk aan waar en hoe je elke stelling gebruikt).
- (e) Je draait de driehoek om zijn symmetrie-as. Is deze rotatie stabiel? Leg uit waarom (niet).
- (f) (bonus) Bewijs de formule voor het traagheidsmoment van een staaf onder een hoek, gegeven bij (b): $I_{\text{staaf}} = \frac{1}{3}m\bar{L}^2 \sin^2 \theta$.

Figuur 1: (a) De gelijkbenige driehoek in de opgave. (b) Rotatie van een staaf om een as door zijn eindpunt, onder een hoek θ .

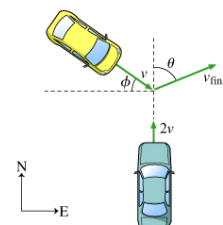
4 Radiosignalen (8 pt)

Op 1 januari 2015 vertrekt astronaut A met snelheid $(4/5)c$ naar de ster α -Centauri, op 4.3 lichtjaar afstand, gemeten in het coördinatenstelsel van de aarde. Als hij de ster heeft bereikt, keert hij onmiddellijk om en gaat met dezelfde snelheid terug naar de aarde. De astronaut heeft een broer B die op aarde blijft. Ze hebben afgesproken dat ze iedere nieuwjaarsdag elkaar per radio begroeten.

- Laat zien dat de astronaut slechts 6 berichten uitzond, terwijl zijn broer op aarde er 10 heeft uitgezonden.
- Teken een ruimte-tijd diagram van de reis van de astronaut, in het ruststelsel van de aarde. Zet de ruimte-as uit in lichtjaren, en de tijd-as in $c \cdot (\text{jaar})$. Geef de helling van alle lijnen die je tekent aan.
- Teken de signalen van broer B in het ruimte-tijd diagram. Hoeveel signalen heeft A ontvangen onderweg van de aarde naar α -Centauri, en hoeveel op de terugweg?
- Teken een tweede ruimte-tijd diagram met de reis van de astronaut, en daarin de signalen die hij zelf uitzond. Hoeveel signalen heeft zijn broer B ontvangen waarin A meldde dat hij nog onderweg was van de aarde naar α -Centauri, en hoeveel waarin hij zei op de terugweg te zijn?

5 Een klassieke en een relativistische botsing (10 pt)

Twee auto's met dezelfde massa m botsen en bewegen na de botsing als één geheel verder. Voor de botsing reed een auto in noordelijke richting met snelheid $2v$, terwijl de andere auto onder een hoek ϕ met de oostelijke richting reed met snelheid v (zie figuur 2). Na de botsing bewegen de auto's samen verder in een richting die een hoek θ met het noorden maakt. In de eerste twee vragen nemen we aan dat de snelheden van de auto's veel kleiner zijn dan c (klassieke regime).



- Vind de snelheid v_f van de twee auto's samen na de botsing. Druk je antwoord uit in termen van v en ϕ .
- Vind de hoek θ die de auto's maken met de noordelijke richting na de botsing. Druk je antwoord uit in ϕ .

Figuur 2: Setting van opgave 5.

We beschouwen nu het geval dat de snelheden van de auto's relativistisch zijn.

- Bereken de relativistische energieën en impulsen van beide auto's voor de botsing.
- Bereken de massa van de auto's samen na de botsing. Je mag deze uitdrukken in hun energieën en impulsen voor de botsing, of in hun massa's en snelheden voor de botsing.
- Vind de hoek θ die de auto's maken met de noordelijke richting na de botsing. In je antwoord mag je de impulsen voor de botsing (maar niet na de botsing) weer laten staan.

Enkele formules en natuurconstanten

Naam	Symbool	Waarde
Lichtsnelheid	c	$3.00 \cdot 10^8$ m/s
Elementaire lading	e	$1.60 \cdot 10^{-19}$ C
Massa electron	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Massa proton	m_p	$1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Gravitatieconstante	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² /kg ²
Valversnelling	g	9.81 m/s ²
Constante van Planck	h	$6.63 \cdot 10^{-34}$ J · s

Tabel 1: Natuurconstanten

Object	Traagheidsmoment
Dunne staaf (lengte L)	$\frac{1}{12}ML^2$
Ring of holle cylinder (straal R)	MR^2
Schijf of massieve cylinder (straal R)	$\frac{1}{2}MR^2$
Holle bol (straal R)	$\frac{2}{3}MR^2$
Massieve bol (straal R)	$\frac{3}{5}MR^2$
Rechthoek (zijdes a, b), loodrechte as	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
Rechthoek (zijdes a, b), as parallel aan zijde b	$\frac{1}{12}Ma^2$

Tabel 2: Traagheidsmomenten, alle om (symmetrie)assen door het massamiddelpunt.

Vectorafgeleiden

Gradiënt:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right).$$

Divergentie:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Rotatie (curl):

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}.$$

Lorentz transformaties voor de coördinaten van een frame S' dat beweegt met snelheid u in de positieve x -richting in frame S :

$$x' = \gamma(u) \left(x - \frac{u}{c} ct \right) \quad (2)$$

$$ct' = \gamma(u) \left(ct - \frac{u}{c} x \right) \quad (3)$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (4)$$