

MechRela voor TW

Hertentamen - uitwerkingen

22 mei 2015, 14:00-17:00h

1 Kennisvragen (10 pt)

- (a) *Formuleer de drie wetten van Newton die de basis vormen van de klassieke mechanica.*
- (b) *Formuleer de postulaten van de speciale relativiteitstheorie.*
- (c) *Geef aan onder welke algemene omstandigheden er wrijving ontstaat, en hoe je de (grootte en richting) van de wrijvingskracht bepaalt/berekent.*

Geef de definitie of een korte omschrijving (een voorbeeld is niet voldoende) van:

- (d) *Inertiaalstelsel.*
 - (e) *Draaimoment (angular momentum).*
 - (f) *Tijdsdilatatie.*
- (a) (1) **Eerste wet / traagheidswet** Een voorwerp waarop geen krachten worden uitgeoefend behoudt zijn snelheid.
 - (2) **Tweede wet** Als op een voorwerp een kracht wordt uitgeoefend, zorgt deze kracht voor een verandering in de impuls:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

met p de impuls, wat voor een constante massa versimpelt tot $\vec{F} = m\vec{a}$ met a de versnelling.

- (3) **Derde wet** Als een voorwerp een kracht $\vec{F}$ uitoefent op een ander voorwerp, dan oefent het tweede voorwerp een even grote maar tegengesteld gerichte kracht $-\vec{F}$ uit op het eerste voorwerp.
- (b) (1) **Relativiteitsprincipe:** De natuurwetten zijn hetzelfde in alle inertiaalstelsels.
 - (2) **Lichtpostulaat:** De snelheid van het licht is onafhankelijk van de snelheid van de waarnemer (of: is hetzelfde in elk inertiaalstelsel).

- (c) Wrijving ontstaat als twee elkaar rakende oppervlakken langs elkaar glijden (kinetische frictie) of als ten gevolg van andere krachten de oppervlakken langs elkaar zouden glijden als er geen wrijving zou zijn (statische frictie). De onderliggende oorzaak is dat geen enkel oppervlak glad is op moleculair niveau, en het langs elkaar bewegen van twee oppervlakken daarom altijd interacties tussen irregulariteiten tot gevolg heeft. Wrijvingskrachten hangen af van de normaalkrachten die de twee oppervlakken op elkaar uitoefenen. De grootte van de kinetische wrijvingskracht wordt gegeven door $F_f = \mu_k F_n$, met μ de kinetische frictie coëfficiënt en F_n de normaalkracht; de grootte van de statische wrijvingskracht is zodanig dat deze alle andere krachten langs het oppervlak compenseert, tot een maximum waarde $\mu_s F_n$, met μ_s de statische frictie coëfficiënt (dus $F_f \leq \mu_s F_n$). De richting van de wrijvingskracht is langs het raakoppervlak, tegengesteld aan de bewegingsrichting.
- (d) Een inertiaalstelsel is een referentiestelsel waarin de eerste wet van Newton geldig is. Inertiaalstelsels bewegen ten opzichte van elkaar met constante snelheid.
- (e) Het draaimoment (ook wel draai-impuls of hoekimpuls) van een voorwerp is het rotatie-equivalent van de impuls (massa maal snelheid) van een lineaire beweging. We berekenen het draaimoment als het uitproduct van de arm (afstand tot rotatie-as) en de lineaire impuls; voor een rotatie om een vaste as geldt dat dit gelijk is aan het traagheidsmoment maal de (vector) rotatiesnelheid:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}.$$

Voor een verandering van rotatie-impuls is een krachtmoment nodig.

- (f) Tijdsdilatatie is het effect dat de klok in een inertiaalstelsel, dat beweegt ten opzichte van dat van de waarnemer, langzamer loopt. De vertragsingsfactor is de Lorentzfactor $\gamma(u)$ (voor een relatieve snelheid u).

2 De Lennard-Jones potentële energie (10 pt)

De Lennard-Jones potentiaal is een veelgebruikt model om de interacties tussen ongeladen atomen en moleculen te beschrijven. Deze potentiële energie kan op twee equivalente manieren geschreven worden:

$$U_{\text{LJ}}(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6} = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right], \quad (1)$$

met r de afstand tussen de atomen/moleculen en A , B , ε en σ positieve constanten.

- (a) *Bepaal de dimensies van A , B , ε en σ .*
- (b) *Druk ε en σ uit in A en B .*
- (c) *Schets de potentiaal als een functie van r/σ in de tweede vorm, en gebruik deze schets om een fysische interpretatie van ε en σ te geven.*
- (d) *Leidt de Lennard-Jones potentiaal tot aantrekkende of afstotende krachten op korte afstanden? En op lange afstanden?*

(e) Vind alle evenwichtspunten van deze potentiaal, en bepaal hun stabiliteit.

(a) $[u] = \text{Energie} \implies [u] = M \times \frac{L}{T^2} \times L = \frac{ML^2}{T^2}$

$$[A] = \text{Energy} \times \text{Length}^{12} \implies [A] = \frac{ML^{14}}{T^2}$$

$$[B] = \text{Energy} \times \text{Length}^6 \implies [A] = \frac{ML^8}{T^2}$$

Omdat de machten van de termen $((\frac{\sigma}{r})^{12})$ en $((\frac{\sigma}{r})^6)$ verschillend zijn, terwijl we ze bij elkaar optellen, moeten ze dimensieloos zijn, dus $[\sigma] = L$ en $[\epsilon] = [E] = \frac{ML^2}{T^2}$.

(b)

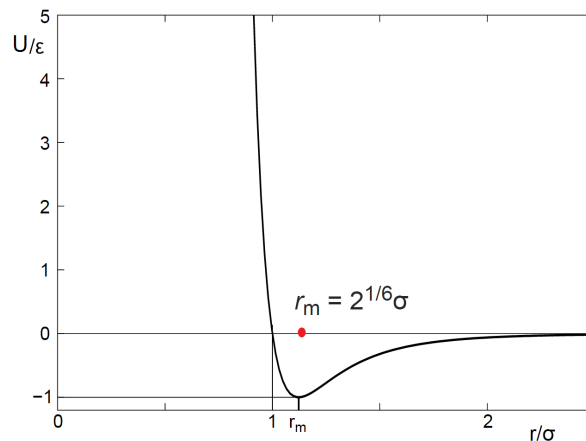
$$4\epsilon\sigma^{12} = A \text{ and } 4\epsilon\sigma^6 = B$$

$$\frac{A}{B} = \sigma^6 \implies \sigma = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/6}.$$

Door σ in te vullen in de uitdrukkingen voor A of B kunnen we ϵ uitrekenen:

$$4\sigma^6\epsilon = B$$

$$4\epsilon A = B^2 \implies \epsilon = \frac{B^2}{4A}.$$



Figuur 1: Schets van de Lennard-Jones potentiaal.

(c) Zie figuur 1. Interpretatie: ϵ geeft een maat voor de diepte van de potentiaalput, σ geeft de lengteschaal en bepaalt daarmee de positie van het evenwichtspunt / de afstand waar de aantrekkende kracht een afstotende kracht wordt.

(d) *Methode 1:*

$$-\frac{\partial u}{\partial r} = F = 4\epsilon\left(\frac{12\sigma^{12}}{r^{13}} - \frac{6\sigma^6}{r^7}\right)$$

Voor kleine r geldt dat $r^{-13} \gg r^{-7} \implies F$ is positief en de kracht dus afstotend.

Voor grote r geldt dat $r^{-13} \ll r^{-7} \implies F$ is negatief en de kracht dus aantrekkend.

Methode 2: Gebruik de schets van (c) om te zien dat de helling van de potentiële energie negatief is voor kleine waarden van r , wat een afstotende kracht impliceert, en dat de helling van de potentiële energie positief is voor grote waarden van r , wat een aantrekkende kracht impliceert.

(e) Voor een evenwichtspunt geldt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= 0 \\ 4\epsilon \left(\frac{12\sigma^{12}}{r^{13}} - \frac{6\sigma^6}{r^7} \right) &= 0 \\ \frac{2\sigma^6}{r^6} - 1 &= 0 \\ \boxed{r_{\text{eq}} = 2^{1/6}\sigma}.\end{aligned}$$

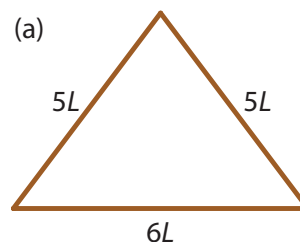
Om de stabiliteit van dit punt te bepalen, kunnen we kijken naar de tweede afgeleide:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r=r_{\text{eq}}} &= 4\epsilon \left(42 \frac{\sigma^6}{r^8} - 156 \frac{\sigma^{12}}{r^{14}} \right) \Big|_{r=r_{\text{eq}}} \\ &= 4\epsilon \left(\frac{42}{2^{4/3}\sigma^2} - \frac{156}{2^{7/3}\sigma^2} \right) \\ &= -36 \cdot 2^{2/3} \frac{\epsilon}{\sigma^2} < 0,\end{aligned}$$

wat betekent dat het evenwichtspunt stabiel is. We kunnen ook naar de grafiek van (c) kijken, waaruit we kunnen vaststellen dat het evenwichtspunt een globaal minimum is van de energie en dus stabiel is.

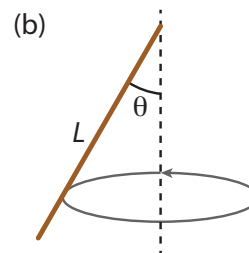
3 Rotaties van een driehoek (9 pt + 3 pt bonus)

We beschouwen een voorwerp in de vorm van een gelijkbenige driehoek met zijden van lengte $5L$, $5L$ en $6L$ (figuur 2a). De driehoek is gemaakt van metalen staven met lineaire dichtheid (massa per eenheid lengte) λ (λ is gerelateerd aan de ‘gewone’ dichtheid ρ als $\lambda = \rho \cdot A$, met A de oppervlakte van de dwarsdoorsnede van de staaf; we nemen hier aan dat de diameter van de staaf veel kleiner is dan zijn lengte).



(a) Bereken de positie van het massamiddelpunt van de driehoek.

(b) Bereken het traagheidsmoment (moment of inertia) van de driehoek om zijn symmetrieas. Je mag hierbij gebruiken dat het traagheidsmoment van een staaf met massa m en lengte L om een as door een eindpunt, onder een hoek θ (figuur 2b), gegeven is door $I_{\text{staaf}} = \frac{1}{3}mL^2 \sin^2 \theta$.



(c) Bereken het traagheidsmoment van de driehoek om zijn lange zijde.

(d) Bepaal tenslotte het traagheidsmoment van de driehoek om een as door zijn massamiddelpunt, loodrecht op het vlak van de driehoek, door gebruik te maken van de stellingen over het traagheidsmoment die we op college afgeleid hebben (geef duidelijk aan waar en hoe je elke stelling gebruikt).

(e) Je draait de driehoek om zijn symmetrie-as. Is deze rotatie stabiel? Leg uit waarom (niet).

(f) (bonus) Bewijs de formule voor het traagheidsmoment van een staaf onder een hoek, gegeven bij (b): $I_{\text{staaf}} = \frac{1}{3}mL^2 \sin^2 \theta$.

Figuur 2: (a) De gelijkbenige driehoek in de opgave. (b) Rotatie van een staaf om een as door zijn eindpunt, onder een hoek θ .

We gebruiken $\bar{M}$ en $\bar{L}$ voor de totale massa en lengte van een staaf.

(a) *Methode 1:* Het massamiddelpunt moet natuurlijk op de symmetrie-as liggen. We kiezen coördinaten zodat de symmetrie-as samenvalt met de y-as en de lange zijde met de x-as (het midden van de lange zijde is dan de oorsprong). We moeten nu nog de y-coördinaat van het massamiddelpunt bepalen, waarvoor geldt

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i.$$

De makkelijkste manier is om eerst de massamiddelpunten van de drie staven te bepalen - die liggen op $(0, 0)$ (lange staaf) en $(\pm \frac{3}{2}L, 2L)$ (korte staven - de hoogte van de driehoek is $4L$). Invullen geeft nu $y_{\text{cm}} = \frac{1}{16}(2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 6) = 5L/4$. Het massamiddelpunt ligt dus op $(0, 5L/4)$.

Methode 2: Het massamiddelpunt moet natuurlijk op de symmetrie-as liggen. Voor

het massamiddelpunt van een staaf van lengte $\bar{L}$, massa M en lineaire dichtheid $\lambda = M/\bar{L}$ onder een hoek θ met de verticaal (figuur 2b) geldt $d\downarrow = dy/\cos\theta$ (met $dd\downarrow$ een infinitesimale lengte langs de staaf) en

$$y_{\text{cm,staaf}} = \frac{1}{M} \int_0^{\bar{L}} \lambda y d\downarrow = \frac{1}{M} \int_0^{\bar{L} \cos \theta} \lambda y \frac{dy}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \bar{L} \cos \theta.$$

Invullen van $\cos \theta = 4/5$ en $\bar{L} = 5L$ geeft $y_{\text{cm,staaf}} = 2L$. Met dezelfde coördinaten als bij methode 1 krijgen we weer $y_{\text{cm}} = \frac{1}{16}(2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 6) = 5L/4$. Het massamiddelpunt ligt dus op $(0, 5L/4)$.

- (b) Voor de lange staaf geldt $I = \frac{1}{12} \bar{M} \bar{L}^2 = \frac{1}{12} 6\lambda L (6L)^2 = 18\lambda L^3$. Voor elk van de korte staven geldt (gegeven formule met $\sin \theta = 3/5$): $I = \frac{1}{3} \bar{M} \bar{L}^2 \sin^2 \theta = 15\lambda L^3$. Het totale traagheidsmoment is de som van deze drie: $I = 48\lambda L^3$.
- (c) Het traagheidsmoment van de lange staaf om zijn lengteas is 0. Voor elk van de korte staven gebruiken we weer de gegeven formule, maar nu met $\sin \theta = 4/5$: $I = \frac{1}{3} \bar{M} \bar{L}^2 \sin^2 \theta = (80/3)\lambda L^3$. Het totale traagheidsmoment is weer de som van deze drie: $I = (160/3)\lambda L^3$.
- (d) *Methode 1*: Om het traagheidsmoment om een as loodrecht op het vlak te bepalen, gebruiken we de loodrechte-assen stelling (perpendicular axis theorem). Voor dit systeem geeft die stelling:

$$I_{\perp} = I_b + I_c = \left(48 + \frac{160}{3}\right) \lambda L^3 = \frac{304}{3} \lambda L^3.$$

Dit is echter niet het gevraagde traagheidsmoment, omdat de vraag ging over het traagheidsmoment om de as door het massamiddelpunt, en dit traagheidsmoment gaat om de as door het kruispunt van de twee assen bij (b) en (c). Om te verplaatsen naar het massamiddelpunt gebruiken we de parallele-assenstelling (parallel-axis theorem): $I_{\perp} = I_{\text{cm}} + Md^2$, met M de totale massa van het voorwerp ($M = 16\lambda L$) en $d = 5L/4$ de afstand tot het massamiddelpunt. Dit geeft:

$$I_{\text{cm}} = I_{\perp} - Md^2 = \left[\frac{304}{3} - 16 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \right] \lambda L^3 = \frac{229}{3} \lambda L^3.$$

Methode 2: Bereken eerst van elke staaf het traagheidsmoment om een as om zijn middel met $I_{\text{staaf}} = \frac{1}{12} \bar{M} \bar{L}^2$, en pas dan de parallele-assenstelling toe om de traagheidsmomenten te vertalen naar traagheidsmomenten voor rotaties om het massamiddelpunt van de driehoek: $I_{\text{cm,driehoek}} = I_{\text{staaf}} + \bar{M} d^2$. Voor de lange staaf geldt $d = \frac{5}{4}L$, voor de korte staven vinden we $d^2 = (45/16)L^2$. Alles invullen geeft:

$$I = \frac{1}{12} 6\lambda L (6L)^2 + 6\lambda L \left(\frac{5}{4}L\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{12} 5\lambda L (5L)^2 + 2 \cdot 5\lambda L \frac{45}{16} L^2 = \frac{229}{3} \lambda L^3.$$

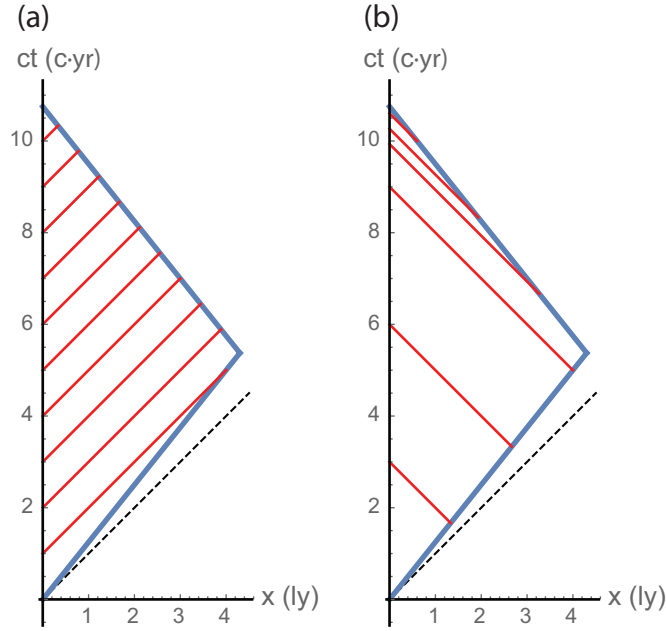
- (e) Volgens de tennis-racket stelling geldt voor de drie hoofdassen van een asymmetrisch voorwerp dat rotaties om de twee assen met het grootste en kleinste traagheidsmoment stabiel zijn, en die om de as met het middelste traagheidsmoment onstabiel. We hebben het traagheidsmoment om de symmetrie-as gevonden bij (b), en dat om de loodrechte as door het massamiddelpunt bij (d). De derde hoofdas gaat ook door het massamiddelpunt, parallel aan de lange zijde van de driehoek, en heeft een traagheidsmoment (combi c+d of hier berekend met parallelle-assenstelling) van $(85/3)\lambda L^3$. Met $48\lambda L^3$ is de symmetrie-as dus de hoofdas met het middelste traagheidsmoment, en rotaties om deze as zijn dus onstabiel.
- (f) Laat $d\ell$ een infinitesimale lengte langs de staaf zijn, x de coördinaat loodrecht op de as, en y de coördinaat langs de as, met $x = y = 0$ op het draaipunt. Dan geldt $d\ell = dx/\sin\theta$ en we vinden voor het traagheidsmoment:

$$I_{\text{staaf}} = \int_0^{\bar{L}} x^2 \lambda d\ell = \int_0^{\bar{L}\sin\theta} x^2 \lambda \frac{dx}{\sin\theta} = \frac{1}{3} \lambda \bar{L}^3 \sin^2(\theta).$$

4 Radiosignalen (8 pt)

Op 1 januari 2015 vertrekt astronaut A met snelheid $(4/5)c$ naar de ster α -Centauri, op 4.3 lichtjaar afstand, gemeten in het coördinatenstelsel van de aarde. Als hij de ster heeft bereikt, keert hij onmiddellijk om en gaat met dezelfde snelheid terug naar de aarde. De astronaut heeft een broer B die op aarde blijft. Ze hebben afgesproken dat ze iedere nieuwjaarsdag elkaar per radio begroeten.

- (a) *Laat zien dat de astronaut slechts 6 berichten uitzond, terwijl zijn broer op aarde er 10 heeft uitgezonden.*
- (b) *Teken een ruimte-tijd diagram van de reis van de astronaut, in het ruststelsel van de aarde. Zet de ruimte-as uit in lichtjaren, en de tijd-as in $c \cdot$ (jaar). Geef de helling van alle lijnen die je tekent aan.*
- (c) *Teken de signalen van broer B in het ruimte-tijd diagram. Hoeveel signalen heeft A ontvangen onderweg van de aarde naar α -Centauri, en hoeveel op de terugweg?*
- (d) *Teken een tweede ruimte-tijd diagram met de reis van de astronaut, en daarin de signalen die hij zelf uitzond. Hoeveel signalen heeft zijn broer B ontvangen waarin A meldde dat hij nog onderweg was van de aarde naar α -Centauri, en hoeveel waarin hij zei op de terugweg te zijn?*
- (a) *In het ruststelsel van de aarde reist de astronaut met een snelheid van $(4/5)c$, en legt dus 0.8 lichtjaar per jaar af. Zijn reis naar α -Centauri duurt (in het ruststelsel van de aarde) dus 5.375 jaar, net zoals de terugreis. Voor de broer op aarde zijn er tussen vertrek en terugkeer 10.75 jaar verstreken, wat betekent dat hij 10 nieuwjaarsgroeten heeft verzonden. Op de klok van de astronaut is echter slechts $10.75/\gamma(\frac{4}{5}c) = 10.75 \cdot \frac{3}{5} = 6.45$ jaar verstreken, hij heeft dus maar 6 nieuwjaarsgroeten verzonden.*

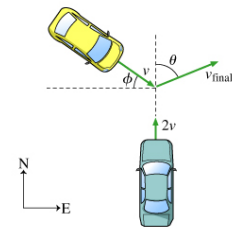


Figuur 3: Ruimte-tijd plaatjes van opgave 4. Reis van astronaut A in blauw, radiosignalen in rood; zwarte lijn geeft lichtsnelheid aan (helling 1). (a) Signalen van broer B. (b) Signalen van astronaut A.

- (b) Zie figuur 3. De reis van astronaut A is in blauw weergegeven. Hij reist 4.3 lichtjaar in 5.75 jaar, daarna even ver en met dezelfde snelheid terug. De helling van zijn wereldlijn in dit (x, ct) -diagram is $c/v = 5/4$.
- (c) Zie figuur 3a. Signalen worden uitgezonden vanaf de tijd-as, met helling 1 (lichtsnelheid). De astronaut ontvangt 1 signaal op zijn heenreis en 9 op zijn terugreis.
- (d) Zie figuur 3b. De astronaut zendt een signaal uit als voor hem een jaar verstreken is; op een aardse klok is dat $(1 \text{ jaar}) \cdot \gamma(4c/5) = 5/3$ jaar. Signalen worden uitgezonden vanaf de positie van de astronaut, met helling 1 (lichtsnelheid). De astronaut zendt 3 signalen uit tijdens zijn heenreis, en ook 3 tijdens zijn terugreis.

5 Een klassieke en een relativistische botsing (10 pt)

Twee auto's met dezelfde massa m botsen en bewegen na de botsing als één geheel verder. Voor de botsing reed een auto in noordelijke richting met snelheid $2v$, terwijl de andere auto onder een hoek ϕ met de oostelijke richting reed met snelheid v (zie figuur 4). Na de botsing bewegen de auto's samen verder in een richting die een hoek θ met het noorden maakt. In de eerste twee vragen nemen we aan dat de snelheden van de auto's veel kleiner zijn dan c (klassieke regime).



Figuur 4: Setting van opgave 5.

- (a) Vind de snelheid v_f van de twee auto's samen na de botsing.

Druk je antwoord uit in termen van v en ϕ .

- (b) Vind de hoek θ die de auto's maken met de noordelijke richting na de botsing. Druk je antwoord uit in ϕ .

We beshouwen nu het geval dat de snelheden van de auto's relativistisch zijn.

- (c) Bereken de relativistische energieën en impulsen van beide auto's voor de botsing.
- (d) Bereken de massa van de auto's samen na de botsing. Je mag deze uitdrukken in hun energieën en impulsen voor de botsing, of in hun massa's en snelheden voor de botsing.
- (e) Vind de hoek θ die de auto's maken met de noordelijke richting na de botsing. In je antwoord mag je de impulsen voor de botsing (maar niet na de botsing) weer laten staan.
- (a) De totale impuls van beide auto's is behouden, maar hun kinetische energie niet (inelastische botsing). Uit impulsbehoud volgt voor de x-richting:

$$p_{x,i} = p_{x,f}$$

$$mv \cos \phi = 2mv_{\text{final}} \sin \theta \quad (2)$$

$$v^2 \cos^2 \phi = 4v_{\text{final}}^2 \sin^2 \theta \quad (3)$$

en voor de y-richting:

$$p_{y,i} = p_{y,f}$$

$$2mv - mv \sin \phi = 2mv_{\text{final}} \cos \theta$$

$$(2 - \sin \phi)^2 v^2 = 4v_{\text{final}}^2 \cos^2 \theta. \quad (4)$$

We tellen nu vergelijking (3) en (4) bij elkaar op:

$$(\cos^2 \phi + (2 - \sin \phi)^2) v^2 = 4v_{\text{final}}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$(\cos^2 \phi + 4 - 4 \sin \phi + \sin^2 \phi) v^2 = 4v_{\text{final}}^2$$

$$v_{\text{final}} = v \sqrt{\frac{5}{4} - \sin \phi}.$$

- (b) We gebruiken vergelijking 2, waarmee we direct de hoek vinden:

$$\sin \theta = \frac{\cos \phi}{2\sqrt{\frac{5}{4} - \sin \phi}}.$$

- (c) Er geldt $\vec{p} = \gamma(v)m\vec{v}$ en $E = \gamma(v)mc^2$ of $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$. Als we de auto met snelheid v nummer 1 geven, en die met snelheid $2v$ nummer 2, krijgen we:

$$\vec{p}_1 = \gamma(v)mv \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \gamma(2v)mv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \gamma(v)mc^2 \text{ en } E_2 = \gamma(2v)mc^2.$$

- (d) Er geldt behoud van energie (ofwel nul-component van de impuls) en behoud van de x- en y-componenten van de impuls. Behoud van impuls geeft (met p_f de grootte van de impuls na de botsing):

$$\begin{aligned} p_1 \cos \phi &= p_f \sin \theta \\ -p_1 \sin \phi + p_2 &= p_f \cos \theta \\ p_f^2 &= p_1^2 - 2p_1 p_2 \sin \phi + p_2^2. \end{aligned}$$

Behoud van energie geeft $E_1 + E_2 = E_f$, kwadrateren en toepassen van $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ (met M de totale massa na de botsing) geeft:

$$\begin{aligned} E_f^2 &= (E_1 + E_2)^2 \\ M^2 c^4 + p_f^2 c^2 &= (E_1 + E_2)^2 \\ M^2 c^4 &= (E_1 + E_2)^2 - (p_1^2 - 2p_1 p_2 \sin \phi + p_2^2) c^2 \\ M &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{(E_1 + E_2)^2}{c^2} - (p_1^2 - 2p_1 p_2 \sin \phi + p_2^2)}. \end{aligned}$$

- (e) We gebruiken impulsbehoud in de x-richting:

$$\sin \theta = \frac{p_1 \cos \phi}{p_f} = \frac{p_1 \cos \phi}{\sqrt{p_1^2 - 2p_1 p_2 \sin \phi + p_2^2}}.$$