

Tentamen Lineaire Algebra TI1206M

13 april 2016, 09.00 – 12.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (niet-grafische) rekenmachine toegestaan.

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. **Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of Engels).**

Normering: 1.7 pt; 2.7 pt; 3.3 pt; 4.7 pt; 5.8 pt; 6.8 pt.

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ en de vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

- Voor welke waarde(n) van α is $\mathbf{b}$ een element van de kolomruimte van A ?
- Bereken alle waarde(n) van α waarvoor de kolommen van A afhankelijk zijn.
- Geef een basis voor $\text{Nul } A$ voor het geval dat $\alpha = -1$.
- Voor welke waarde(n) van α is $\mathbf{b}$ een element van de nulruimte van A ?

2. Gegeven zijn twee matrices en een vector

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

- Bereken de determinant van A .
(Tip: trek eerst de vijfde rij één keer af van de andere rijen.)
- Gegeven is verder dat $AB = 14I$. (Dat hoeft u dus niet na te rekenen!)
Gebruik dit gegeven om A^{-1} te bepalen.
- Los op: $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$. (Tip: gebruik onderdeel b.)

3. Bereken de kleinste kwadratenlijn (*least-squares line*) $y = \alpha + \beta x$ behorende bij de punten $(0,0)$, $(1,4)$, $(2,5)$, $(3,8)$, $(4,8)$.

4. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Toon aan dat $\lambda = -1$ een eigenwaarde is van A .

b. Ga na dat $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van A .

c. Is A diagonaliseerbaar? Zo nee, leg uit waarom niet, zo ja, geef een matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $A = PDP^{-1}$.

5. a. Bereken met de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis voor de deelruimte (*subspace*) S van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

b. Beschrijf (in woorden dus!) een methode om een basis voor het orthogonale complement van S te berekenen, en bereken zo'n basis.

c. Bereken de orthogonale projectie van de vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ op S .

6. Geef bij elk van de volgende beweringen een bewijs in geval van juistheid en een tegenvoorbeeld of ander duidelijk argument in geval van onjuistheid.

In de eerste twee onderdelen is A een willekeurige 4×7 matrix.

a. Het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft voor elke $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^4$ (altijd) oneindig veel oplossingen.

b. Het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, de nulvector in $\mathbb{R}^4$, heeft (altijd) minimaal drie *onafhankelijke* oplossingen.

c. Als een $n \times n$ matrix A diagonaliseerbaar is, dan is $2A + I$ eveneens diagonaliseerbaar.

d. Als $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ een orthonormaal stel vectoren is in $\mathbb{R}^4$, dan is de verzameling vectoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, 2\mathbf{u}_3\}$ orthogonaal.