

Tentamen Lineaire Algebra (TI1206M)

13 april 2015, 09.00 – 12.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. De punten: 6 + 5 + 5 + 8 + 8 + 6

1. a. Bereken de algemene oplossing¹ in vectorvorm van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- b. Voor de genoemde matrix A , is elk stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ consistent?

Zo nee: geef een voorbeeld (met toelichting!) van een vector $\mathbf{y}$ waarvoor het stelsel strijdig² is.

- c. Is de matrix afbeelding $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ surjectief³? Begin je antwoord met de definitie van ‘surjectief’.

2. Gegeven zijn de volgende vijf vectoren in $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

Verder is gedefinieerd $H = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$.

- a. Toon aan dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4\}$ een basis is voor H .
b. Toon aan dat $\mathbf{v}$ een element is van H en bereken de coördinaten van $\mathbf{v}$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ uit onderdeel a.
c. Geef een basis voor het orthogonale complement van H .

3. Gegeven zijn de LU -ontbinding van een matrix A en een vector $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- a. Los de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op *zonder* eerst het product uit te rekenen.
(Als je het product wel uitwerkt kun je geen punten krijgen voor deze opgave.)
b. Bereken – eveneens zonder het product uit te rekenen – de determinanten van A en van $2A^{-1}$.

¹general solution

²inconsistent

³onto

4. In deze opgave bekijken we de matrix $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (en gaan er wat mee doen;-)

a. Bereken de inverse van C .

b. Toon aan dat er geen reële matrices P en D (een diagonaalmatrix) bestaan zodat $C = PDP^{-1}$.

c. Bereken complexe matrices Q en Δ (een diagonaalmatrix) waarvoor $C = Q\Delta Q^{-1}$. (NB. je hoeft Q^{-1} niet te berekenen.)

5. Gegeven zijn de volgende drie vectoren in $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{en } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Laat verder $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$.

a. Bereken een orthogonale basis voor $W = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

b. Bereken *met behulp van het vorige onderdeel* de projectie $\hat{\mathbf{y}}$ van de vector $\mathbf{y}$ op $\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

c. Geef de kleinste-kwadratenoplossing⁴ van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

d. Bereken de afstand⁵ van $\mathbf{y}$ tot $W^\perp$.

6. Waar of onwaar

Indien waar: geef een goed argument; indien onwaar: geef een tegenvoorbeeld!

a. Het product van twee symmetrische matrices ($n \times n$) is weer een symmetrische matrix.

b. Het product van twee orthogonale matrices ($n \times n$) is weer een orthogonale matrix.

c. Als A en B allebei de eigenwaarde⁶ 0 hebben, dan heeft AB ook eigenwaarde 0.

EINDE

⁴least-squares solution

⁵distance

⁶eigenvalue

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1a

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 & -8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

x_2, x_4 en x_5 kunnen als vrije variabelen genomen worden. De algemene oplossing wordt daarmee

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2x_2 - 2x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ 4 + 2x_4 - 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1b $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ is precies dan oplosbaar als $\mathbf{y} \in \text{Col } A$. Uit de echelonmatrix blijkt dat de eerste en de derde kolom van A een basis vormen voor $\text{Col } A$. $\text{Col } A \neq \mathbb{R}^3$, dus zo'n $\mathbf{y}$ bestaat zeker.

Verder is te zien dat de kolomruimte alleen vectoren $\mathbf{v}$ bevat waarvoor $v_2 = -v_3$.

De vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ voldoet daar niet aan, dus zit niet in $\text{Col } A$.

1c $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is surjectief als $\text{Im } T = \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^m$.

Anders gezegd: als er voor elke $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ een $\mathbf{x}$ bestaat zodat $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Volgens het vorige onderdeel is dat *niet* het geval, en is T dus *niet* surjectief.

2b (en **2a**) Vegen geeft

$$[\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4 \mid \mathbf{v}] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Daaruit volgt: $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4\}$, bestaande uit de 'pivotkolommen', is een basis voor H , en

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_4, \text{ dus } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{2c} \ \mathbf{x} \in W^\perp \iff \mathbf{b}_i^T \mathbf{x} = 0, \ i = 1, 2, 4 \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dit lossen 'we' op met de aangevulde matrix:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Een basis voor het orth. complement wordt dan (bijv) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3a $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \text{ geeft } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ en dan } U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ geeft } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3b

$$\det(LU) = \det(L)\det(U) = 1 \cdot 4 = 4.$$

$$\det(2A) = \det(2I \cdot A^{-1}) = \det(2I)\det(A)^{-1} = 2^4 \cdot 4^{-1} = 4.$$

4a Dat kan haast uit het hoofd! $C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4b De opdracht is eigenlijk: aantonen dat C niet diagonaliseerbaar is. Daarvoor zijn drie onafhankelijke eigenvectoren, dus in ieder geval drie reële eigenwaarden nodig.

Ontwikkelen naar de tweede rij (of kolom) geeft

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 + 4).$$

Daaruit valt af te lezen dat C de niet-reële eigenwaarden $\lambda_{2,3} = \pm 2i$ heeft en dus beslist *niet* diagonaliseerbaar is.

4c Eigenvector bij $\lambda = 2i$: (tel eerste rij i keer op bij derde rij, en schaal de tweede rij)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 - 2i & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2i & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim$$

Dan $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_2 = 2i$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}$ (de geconjugeerde) een e.v.

bij $\lambda_3 = -2i$, en het is nog eenvoudiger te zien dat $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ een e.v. is bij $\lambda_1 = 2$.

Conclusie

$$C = Q\Delta Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \end{bmatrix}^{-1}$$

5a Gram-Schmidt:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1} \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1} \mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2} \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Mogelijk antwoord: $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

$$\text{5b } \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1} \mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2} \mathbf{b}_2 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3} \mathbf{b}_3 = \frac{9}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{6}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

5c Daarvoor moet het stelsel $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{y}$ opgelost worden:

$$[A^T A | A^T \mathbf{y}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 12 \\ 3 & 4 & 4 & 12 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Dus de kleinste-kwadratenoplossing is $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Achteraf had je dat ook sneller kunnen zien: $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$.

5d Er geldt: $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{y}}$, met $\hat{\mathbf{y}} \in W$ reeds berekend, en $\tilde{\mathbf{y}}$ de projectie van $\mathbf{y}$ op $W^\perp$.
Dan geldt $\text{dist}(\mathbf{y}, W^\perp) = \text{dist}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\| = \|\hat{\mathbf{y}}\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2} = 6$.

6a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ is niet symmetrisch, dus bewering is **onwaar**.

6b Orthogonaal betekent: $Q^T Q = Q Q^T = I$.

Stel dat Q_1 en Q_2 hieraan voldoen. Dan $(Q_1 Q_2)^T (Q_1 Q_2) = Q_2^T Q_1^T Q_1 Q_2 = Q_2^T (Q_1^T Q_1) Q_2 = Q_2^T (I) Q_2 = Q_2^T Q_2 = I$, en net zo $(Q_1 Q_2)(Q_1 Q_2)^T = I$.

(Het laatste is overigens overbodig, d.w.z. volgt al uit het feit dat $Q_1 Q_2$ vierkant is.)

Dus de bewering is **waar**.

6c Deze bewering is **waar**: A heeft eigenwaarde 0 is (onder andere!) equivalent met

$\text{Det}(A) = 0$, en als $\text{Det}(A) = 0$, dan is ook $\text{Det}(AB) = 0$, dus heeft ook AB eigenwaarde 0.

Alternatief: als $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ een eigenvector is van B , dan is $AB\mathbf{v} = A(B\mathbf{v}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, dus $\mathbf{v}$ is een eigenvector van AB .