

Tentamen TI3306 Complexiteitstheorie

13 april 2016

9.00-12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 10 meerkeuzevragen, 5 korte (open) vragen en 2 open vragen.
- Voor de meerkeuzevragen kunt u maximaal 50 punten behalen, voor de korte open vragen maximaal 30 punten en voor de open vragen maximaal 20 punten.
- Het totaal aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) wordt als volgt bepaald:
 - o Per meerkeuzevraag i wordt het aantal foutief beantwoorde alternatieven f_i bepaald. Aangezien per vraag 0,1,2,3 of 4 alternatieven juist kunnen zijn geldt: $0 \leq f_i \leq 4$;
 - o Laat $f = \sum f_i$ voor alle 10 meerkeuzevragen ($0 \leq f \leq 40$); het aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) is dan $mp = 50 \times \max\{0, (40 - 1.5 \times f) / 40\}$.
- Het eindcijfer c wordt bepaald door de som te nemen van mp , het totaal aantal punten behaald voor de 5 korte vragen (kv) en de som van het aantal punten behaald voor de twee open vragen (ov) en vervolgens het resultaat te delen door 10: $c = (mp + kv + ov) / 10$; dit cijfer wordt vervolgens afgerond op het dichtstbijzijnde halve of gehele getal.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen, boek of andere bronnen is niet toegestaan.
- Het gebruik van grafische en niet-grafische rekenmachines is eveneens niet toegestaan.
- Beantwoord de meerkeuzevragen op het bijgeleverde antwoordformulier.
- Beantwoord de open vragen zo bondig mogelijk; geef geen irrelevante informatie, dit kan leiden tot puntenaftrek!
- Controleer of u op ieder blaadje uw naam en studienummer heeft vermeld en geef het totaal aantal ingeleverde bladen op (tenminste) de eerste pagina.

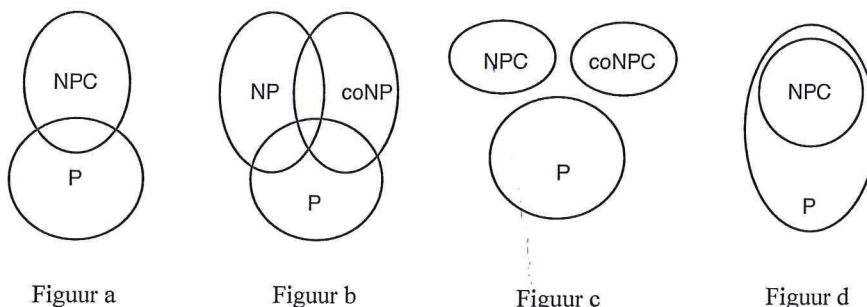
Notationele conventies:

- $A \leq B$ betekent dat er een polynomiale-tijdreductie van A naar B bestaat.
- $A \leq_T B$ betekent dat er een polynomiale Turingreductie van A naar B bestaat.
- A^c is het complement van het probleem A .
- Er wordt steeds vanuit gegaan, dat $P \neq NP$ en $NP \neq coNP$, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel wordt vermeld.

MEERKEUZEVRAGEN (50 PUNTEN)

- Vraag 1.** Welke van onderstaande problemen is een NPC-probleem?
- Gegeven een verzameling S van positieve integers en een integer $t \geq 0$, is er een subset S' van S waarvan de totale som *kleiner dan of gelijk is* aan t ?
 - Gegeven een verzameling S van positieve integers en een integer $t \geq 0$, is er een subset S' van S waarvan de totale som *groter dan of gelijk is* aan t ?
 - Gegeven een verzameling S van positieve integers en twee positieve integers s en t , is er een subset S' van S waarvan de totale som *ligt tussen* s en t ?
 - Gegeven een verzameling S van positieve integers en twee positieve integers s en t , is er een subset S' van S zodat (i) de som van integers in S' *kleiner of gelijk is* aan s en (ii) de som van integers in $S - S'$ *kleiner is of gelijk is* aan t ?
- Vraag 2.** Gegeven zijn de beslissingsproblemen A , B en C met $A \leq B$ en $B \leq C$. Hierbij is bekend dat B een NP-hard probleem is. Onder welke condities is het zeker dat B een NPC-probleem is?
- als C een NP-probleem is.
 - als A een NPC-probleem is.
 - als $C \leq A$ en A is een NP-probleem.
 - als A een NP-probleem is.
- Vraag 3.** Ga na welke van de volgende uitspraken juist zijn:
- Sommige P-problemen zijn in $O(1)$ -tijd oplosbaar.
 - $NP^P = NP$.
 - Als $A \in \text{coNPC}$ dan $A \in \text{PSPACE}$.
 - voor elk probleem $A \in NP$ is er een sterk-NPC probleem B zodat $A \leq B$.
- Vraag 4.** We noemen een optimaliseringsprobleem A *benaderbaar* als A een approximatie-algoritme heeft met approximatieverhouding $1 \leq 1 + \varepsilon < \infty$. Dan geldt:
- MINCOVER is een benaderbaar probleem.
 - TSP-OPT is benaderbaar, tenzij $\varepsilon < 1$.
 - Als A benaderbaar is, dan zijn ook alle problemen B waarvoor geldt $B \leq_T A$ benaderbaar.
 - Ieder onbenaderbaar probleem heeft een benaderbaar deelprobleem.

Vraag 5.



In bovenstaande Venn-diagrammen zijn een aantal mogelijke relaties tussen complexiteitsklassen weergegeven. Hierbij geldt dat

- een situatie als in Figuur a onmogelijk is, zelfs als $P = NP$.
- een situatie als in Figuur b alleen mogelijk is als $P \neq NP$.
- een situatie als in Figuur c onmogelijk is als $P = NP$.
- een situatie als in Figuur d mogelijk is als $P = NP$.

Vraag 6. In het probleem 3-PARTITIE is een verzameling $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ gegeven met voor iedere a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, een gewicht $g(a_i) \in \mathbb{Z}^+$. Gevraagd wordt of het mogelijk is A in drie disjuncte deelverzamelingen A_1, A_2 en A_3 op te delen, zodanig dat $\sum_{a \in A_1} g(a) = \sum_{a \in A_2} g(a) = \sum_{a \in A_3} g(a)$. Men stelt de volgende reductie f voor om aan te tonen dat dit probleem een **NP-hard** probleem is:

f beeldt instanties (A, g) van PARTITION af op instanties $f(A, g) = (A', g')$ van 3-PARTITIE, waarin

- $A' = A \cup \{a_{n+1}\}$,
- $g'(a) = g(a)$ voor alle $a \in A$, en
- $g'(a_{n+1}) = \lfloor \sum_{a \in A} g(a)/2 \rfloor$.

Voor deze reductie f geldt dat

- a. f niet gebruikt kan worden om de **NP-hardheid** van 3-PARTITIE aan te tonen. Voor dat doel zou f immers instanties van 3-PARTITIE moeten afbeelden op instanties van PARTITION.
- b. f een correcte polynomiale tijdreductie is van PARTITION naar 3-PARTITIE.
- c. f een correcte polynomiale tijdreductie zou zijn van PARTITION naar 3-PARTITIE als $g'(a_{n+1}) = \lfloor \sum_{a \in A} g(a)/3 \rfloor$ in plaats van $g'(a_{n+1}) = \lfloor (\sum_{a \in A} g(a))/2 \rfloor$.
- d. f een correcte polynomiale tijdreductie van PARTITION naar 3-PARTITIE zou zijn als $A' = A \cup \{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$, $g'(a) = g(a)$ voor alle $a \in A$, $g'(a_{n+1}) = g'(a_{n+2}) = \lfloor \sum_{a \in A} g(a)/2 \rfloor$ en $g'(a_{n+3}) = \sum_{a \in A} g(a)$.

Vraag 7. Stel er bestaat een polynomiaal probabilistisch algoritme voor een **NP-compleet** beslissingsprobleem A . Voor een yes-instantie van A geeft dit algoritme met kans 0.8 een correct antwoord, voor een no-instantie van A geeft het algoritme met een kans 0.7 een goed antwoord. Wat kun je hieruit concluderen?

- a. A is een **P**-probleem.
- b. A is een **BPP**-probleem.
- c. Er bestaat een polynomiaal probabilistisch algoritme voor A dat met een kans van tenminste .95 in alle omstandigheden een correct antwoord geeft.
- d. **NP** $\subseteq$ **BPP**.

Vraag 8. Ga na welke van de volgende uitspraken juist is:

- a. Voor ieder probleem $A \in \mathbf{P}$ bestaat er een $k \geq 0$ zodat A in $O(n^k)$ -tijd oplosbaar is.
- b. Voor ieder probleem $A \in \mathbf{NP}$ bestaat er een $k \geq 0$ zodat A in $O(n^k)$ -ruimte oplosbaar is.
- c. Als er een **PSPACE-compleet** probleem zou bestaan dat tevens een **P**-probleem zou zijn, dan zou gelden **P** = **NP**.
- d. Als B een restrictie is van een probleem $A \in \mathbf{NP}$, dan is $B \in \mathbf{NP}$.

Vraag 9. Een aantal pakketten moet verdeeld worden over twee containers zodat het gewicht van de containers zoveel mogelijk overeenkomt. Men past een benaderingsalgoritme toe om een zo gelijkmatig mogelijke verdeling van de pakketten over de twee containers te verkrijgen. De performance van zo'n algoritme wordt bepaald door het gewicht van de *zwaarst* beladen container te delen door het gewicht van de *minst zwaar* beladen container. Het totaal gewicht van de gegeven verzameling pakketten is gelijk aan 100 en het benaderingsalgoritme vindt een oplossing zodanig dat één container 60 kg en de andere container 40 kg bevat.

Het is bekend, dat de approximatieratio van dit benaderingsalgoritme gelijk is aan 6/5. Hieruit volgt dat

- a. de zwaarst beladen container in een optimale oplossing minstens 5/4 maal zo zwaar is als de minst zwaar beladen container.
- b. de zwaarst beladen container in een optimale oplossing hoogstens 55 kg weegt.
- c. de minst beladen container in een optimale oplossing 35 kg kan wegen.
- d. in een optimale oplossing beide containers even zwaar beladen kunnen zijn.

Vraag 10. Van de volgende serie inclusierelaties

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq NPSpace \subseteq EXP$$

is bekend dat

- a. minstens één van de inclusierelaties strict is.
- b. minstens één inclusierelatie door een is-gelijk (=) relatie kan worden vervangen.
- c. de klasse **PP** tussen **NPSpace** en **EXP** geplaatst moet worden:
NPSpace $\subseteq$ **PP** $\subseteq$ **EXP**.
- d. de klasse **BQP** tussen **NP** en **PSPACE** geplaatst moet worden:
NP $\subseteq$ **BQP** $\subseteq$ **NPSpace**.

OPEN VRAGEN I (30 PUNTEN)

Onderstaande vragen dient u kort te beantwoorden.

Een antwoord dient in hoogstens 5-10 regels gegeven te worden.

- Vraag 11.* Een complexiteitsklasse C is naar beneden gesloten onder $\leq_T$ als voor alle problemen A en B geldt: $A \leq_T B$ en $B \in C$ impliceert $A \in C$. Laat zien dat als NP naar beneden gesloten is onder $\leq_T$, we kunnen concluderen dat $NP = coNP$.
- Vraag 12.* In de Sipser-notatie wordt een probleem A gerepresenteerd als een taal. Iemand beweert nu dat $A \subseteq B$ impliceert dat $A \leq B$. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
- Vraag 13.* Het is bekend dat $2-SAT \in P$ terwijl $3-SAT \in NPC$.
Neem nu een willekeurige $3-SAT$ instantie (U, C) en beschouw de volgende transformatie:
Vervang iedere clause $c_i = x_i \vee y_i \vee z_i \in C$ door de volgende drie clauses
 $c_{i1} = x_i \vee b_i$, $c_{i2} = b_i \vee y_i$ en $c_{i3} = b_i \vee z_i$,
waarbij voor iedere clause c_i een nieuwe unieke literal b_i gekozen wordt.
Laat $C' = \bigcup_{c \in C} \{c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}\}$.
Dan is het resultaat een polynomiale transformatie van een $3-SAT$ instantie (U, C) naar een $2-SAT$ instantie (U', C') .
Als deze transformatie een polynomiale tijdreductie zou zijn, zou gelden $3-SAT \leq 2-SAT$.
Maar dan zou, omdat P naar beneden gesloten is onder $\leq$, tevens gelden: $3-SAT \in NPC \cap P$.
En daaruit volgt $P=NP$.
Geef nu precies aan waarom de voorgestelde transformatie geen polynomiale tijdreductie is van $3-SAT$ naar $2-SAT$.
- Vraag 14.* Laat zien dat uit $PSPACE^{PSPACE} = PSPACE$ volgt dat $NP^{PSPACE} = P^{PSPACE}$.
- Vraag 15.* Het vinden van een opspannende boom in een ongerichte graaf $G = (V, E)$ is een P -probleem. Waarom is het probleem om, gegeven een ongerichte graaf G en een integer K , een opspannende boom T voor G te vinden waarbij iedere knoop in T een graad heeft kleiner of gelijk aan K , een NP -hard probleem?

OPEN VRAGEN II (20 PUNTEN)

Beantwoord onderstaande vragen zo kort mogelijk. Geef geen irrelevante informatie, dit kan tot puntenaftrek aanleiding geven.

Vraag 16. (15 punten)

Eén van de taken van een compiler is te beslissen welke variabelen die in een programma gebruikt worden, kunnen worden toegewezen aan een kleine verzameling registers. Hierbij moet worden voorkomen dat twee variabelen die op hetzelfde tijdstip in gebruik zijn, worden toegewezen aan hetzelfde register. Programmavariabelen die niet kunnen worden toegewezen aan een register worden dan in RAM bewaard. Dat vertraagt echter de executietijd van het programma. Daarom zal een compiler zoveel mogelijk programmavariabelen aan de verzameling registers willen toewijzen. Stel nu dat de verzameling gebruikte variabelen gelijk is aan V , het aantal registers gelijk is aan K en R de verzameling is van paren $\{v, v'\}$ van die variabelen die tegelijkertijd gebruikt worden in het programma.

- Laat zien dat voor $V = \{a, b, c, d\}$, $K=3$ en $R = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$, nooit alle variabelen aan de verzameling van 3 registers kunnen worden toegewezen.
- Laat zien dat gegeven een instantie (V, K, R) van dit probleem het vinden van een zo groot mogelijk aantal variabelen die aan registers kunnen worden toegekend een **NP-hard** probleem is.

Hint: laat zien dat er een eenvoudige reductie bestaat van een bekend NPC-probleem naar een beslissingsvariant van dit probleem. U kunt hierbij gebruik maken van bekende NPC-problemen als SAT, VC, HAMPAD, CLIQUE, SUBSUM, GRAPH 3-COLORING, PARTITION, MULTIPROCESSOR SCHEDULING, TSP, HITTING SET, KNAPSACK en BINPACKING.

Vraag 17. (5 punten)

In het college zijn drie thesen besproken: de *Church-Turing These*, de *Sterke Church-Turing These* en de *Sterke $P \neq NP$ These*. Als we naast de klassieke fysica ook quantum-fysische berekeningen betrekken, wat is dan de status van bovenstaande thesen?

EINDE TENTAMEN