

1. Laat (X, d) een metrische ruimte zijn en laat $a \in X$. Definieer een verzameling door

$$V = \{x \in X : d(x, a) \leq 1\}.$$

- (5) a. Toon aan dat V gesloten is.
- (4) b. Bewijs dat $\partial V \subseteq \{x \in X : d(x, a) = 1\}$.
- (3) c. Geef een voorbeeld van een metrische ruimte (X, d) zodat $\partial V \neq \{x \in X : d(x, a) = 1\}$.

2. Laat (X, d) en (Y, ρ) beide metrische ruimten zijn.

- (3) a. Vul de volgende definitie aan: Een functie $f : X \rightarrow Y$ heet *continu* in $a \in X$ als
Laat vanaf nu $f : X \rightarrow Y$ een continue functie zijn.
- (5) b. Laat $A \subseteq X$ zo zijn dat $\overline{A} = X$. Toon aan: als f surjectief is dan geldt $\overline{f(A)} = Y$.
- (6) c. Laat $C \subseteq X$ een compacte verzameling zijn. Laat met behulp van de definitie van compactheid zien dat $f(C)$ compact is.

3. Laat Ω een niet-lege verzameling zijn. Laat $B(\Omega)$ de verzameling van de begrensde reëelwaardige functies op Ω zijn. Definieer $D : B(\Omega) \times B(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ door

$$D(f, g) = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - g(\omega)|.$$

- (4) a. Laat zien dat $(B(\Omega), D)$ een metrische ruimte is.
- (2) b. Vul de volgende definitie aan: een metrische ruimte (X, d) heet *volledig* als
- (6) c. Toon aan dat $(B(\Omega), D)$ volledig is.

4. Laat (X, d) een compacte metrische ruimte zijn. Een functie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heet Lipschitz-continu als er een constante L bestaat zodat voor alle $x, y \in X$ geldt dat $|f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y)$. Laat $C(X)$ de verzameling van continue functies zijn op X met de uniforme metriek. Laat $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ de verzameling van alle Lipschitz continue functies zijn.

- (2) a. Laat $x_0 \in X$ en definieer $f_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$ door $f_{x_0}(x) = d(x, x_0)$. Toon aan dat $f_{x_0} \in \mathcal{A}$.
- (2) b. Toon aan dat $\mathcal{A}$ de punten van X scheidt.
- (4) c. Laat zien dat $\mathcal{A}$ een algebra van functies is.
- (4) d. Formuleer de algebra-versie van de Stelling van Stone–Weierstrass en laat zien dat $\mathcal{A}$ dicht ligt in $C(X)$.

Zie ook de volgende bladzijde.

5. Laat $(S, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte zijn. Laat $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$.

- (5) a. Definieer een verzameling A door $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dan geldt $A \in \mathcal{A}$. Laat met behulp van de definities zien dat $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Definieer een verzameling $B \subseteq S$ door $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$.

- (3) b. Laat zien dat $B \in \mathcal{A}$.
- (5) c. Neem aan dat $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Bewijs dat $\mu(B) = 0$.

6. Laat $(S, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte zijn.

- (6) a. Laat $f : S \rightarrow [0, \infty]$ een meetbare functie zijn met de eigenschap dat $\int_S f \, d\mu = 0$. Laat zien dat $f = 0$ bijna overal.
- (6) b. Laat $g : S \rightarrow [0, \infty]$ een integreerbare functie zijn en laat $r > 0$. Bewijs de volgende ongelijkheid:

$$\mu(\{s \in S : g(s) > r\}) \leq \frac{1}{r} \int_S g \, d\mu.$$

- (5) c. Laat $h : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ een integreerbare functie zijn. Toon aan dat $|h|$ integreerbaar is en dat

$$\left| \int_S h \, d\mu \right| \leq \int_S |h| \, d\mu.$$

7. Laat λ de Lebesgue maat zijn en laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn.

- (3) a. Laat $n \in \mathbb{N}$. Leg uit waarom de functie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f_n(x) = f(x)(1 + (\sin x)^n)$ meetbaar en integreerbaar is.
- (7) b. Bereken de volgende limiet met behulp van één van de convergentiestellingen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda.$$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1.$$

EINDE