

1. Laat $(S, \mathcal{A})$ en $(T, \mathcal{B})$ beide meetbare ruimten zijn.
 - (3) a. Vul de volgende definitie aan: Een functie $g : S \rightarrow T$ is meetbaar als
 Laat $f : S \rightarrow T$ een functie zijn. Laat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ een familie van verzamelingen zijn zó dat $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ voor alle $B \in \mathcal{F}$ en $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$. Definieer $\tilde{\mathcal{B}} = \{B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$.
 - (6) b. Laat zien dat $\tilde{\mathcal{B}}$ een σ -algebra is.
 - (6) c. Bewijs dat f meetbaar is.
 Hint: Laat zien dat $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$.
2. Laat $(S, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte zijn.
 - (5) a. Vul de volgende definitie aan: Een afbeelding $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heet een *maat* als
 Laat in het vervolg μ een maat zijn op $(S, \mathcal{A})$.
 - (10) b. Laat $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ en $A \subseteq S$ zo zijn dat $A_n \uparrow A$. Toon met behulp van de definities aan dat $A \in \mathcal{A}$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
 - (5) c. Laat $g : S \rightarrow [0, \infty)$ een simpele functie zijn. Laat $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ zó zijn dat $A_n \uparrow A$. Toon met behulp van (b) aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} g \, d\mu = \int_A g \, d\mu$ (we staan hier *niet* toe dat je gebruikt maakt van de convergentiestellingen).
- (20) 3. Laat $(S, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte zijn. Formuleer en bewijs de monotone convergentiestelling.
 Hint: Je kunt aan het einde van je bewijs opgave vraag 2c gebruiken.
4. Laat λ de Lebesgue maat zijn op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ met de Borel- σ -algebra.
 - (8) a. Toon aan dat $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.
 Definieer voor elk geheel getal $n \geq 1$ de functie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = \frac{\sin(ne^x)}{1 + nx^2}.$$
 - (3) b. Geef aan waarom de functies $f_1, f_2, \dots$, alle meetbaar zijn.
 - (13) c. Bewijs met behulp van de gedomineerde convergentiestelling dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 0$.
- (6) 5. a. Leg uit waarom $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e_k}{k^2 + |k| + 1}$ convergeert in $L^2(0, 2\pi)$. Hierbij is $e_k(x) = e^{ikx}$.
- (5) b. Laat $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e_k}{k^2 + |k| + 1}$ en $s_n(f) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e_k$. Toon aan dat

$$\|f - s_n(f)\|_2^2 \leq 4\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \leq \frac{4\pi}{3n^3}.$$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1.$$

EINDE