

Antwoorden deeltentamen 2, 27-01-2017.

1-3 zie lecture notes.

4a Eerst laten we zien dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\lambda(\{x\}) = 0$. Laat $I_n = (x - \frac{1}{n}, x]$ voor $n \geq 1$. Dan $\lambda(I_n) = 1/n$. Aangezien $I_n \downarrow \{x\}$ volgt uit een stelling uit het dictaat dat $\lambda(\{x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(I_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$.

4b De functie $x \mapsto \sin(ne^x)$ is continu als samenstelling van continue functies. De functie $x \mapsto 1 + nx^2$ is continu en $\neq 0$. Dus f_n is continu, en daarom ook meetbaar.

4c. Merk eerst op dat voor $x \neq 0$ geldt dat

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{nx^2} \rightarrow 0.$$

Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ voor alle $x \neq 0$. Dus er geldt $f_n \rightarrow 0$ bijna overal op $\mathbb{R}$. Om de gedomineerde convergentiestelling toe te kunnen passen hebben we een zoeken we een integreerbare g zodat voor alle $n \geq 1$ en $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $|f_n(x)| \leq g(x)$ (deze functie g mag NIET van n afhangen).

Laat $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de functie $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ zijn. Voor alle $n \geq 1$ en $x \in \mathbb{R}$ geldt $|\sin(ne^x)| \leq 1$ en $1 + nx^2 \geq 1 + x^2$ en dus dat $|f_n(x)| \leq g(x)$. We beweren dat g integreerbaar is. Aangezien g continu en ≥ 0 is voldoet het om te laten zien dat de oneigenlijke Riemann integraal over $(-\infty, \infty)$ eindig is (wegens stelling uit dictaat). Er geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(t) + \lim_{s \rightarrow -\infty} \arctan(s) = \pi < \infty.$$

Dit bewijst de bewering.

Uit de gedomineerde convergentiestelling volgt nu dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda = 0.$$

5a. We gaan na dat $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ in ℓ^2 ligt. Er geldt $k^2 + |k| + 1 \geq k^2$, dus

$$\|(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2}^2 = 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus 0} \frac{1}{(k^2 + |k| + 1)^2} \leq 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus 0} \frac{1}{k^4} < \infty.$$

Er volgt dus uit de Stelling van Riesz–Fischer dat $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k$ in $L^2(0, 2\pi)$ convergeert. Dit bewijst het gevraagde.

5b. Merk op dat $f - s_n(f) = \sum_{|k| > n} c_k e_k$ waarbij de reeks in $L^2(0, 2\pi)$ convergeert. Er volgt uit Parseval's identiteit dat

$$\|f - s_n(f)\|_2^2 = 2\pi \sum_{|k| > n} |c_k|^2 \leq 2\pi \sum_{|k| > n} \frac{1}{k^4} = 4\pi \sum_{k > n} \frac{1}{k^4}$$

Verder geldt

$$\sum_{k > n} \frac{1}{k^4} \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3n^3}.$$

Indien we beide combineren dan volgt het gevraagde.