

1. Laat (X, d) een metrische ruimte zijn.

- (5) a. Vul de volgende definitie aan: Een verzameling $O \subseteq X$ heet *open* als
- (10) b. Laat $A \subseteq X$ een niet-lege verzameling zijn. Bewijs de volgende equivalentie door alleen gebruik te maken van de definities:

A is gesloten $\iff$ voor iedere rij $(x_n)_{n \geq 1}$ in A en $x \in X$ geldt: als $x_n \rightarrow x$ dan $x \in A$.

- (10) c. Laat d de discrete metriek op X zijn, dat wil zeggen

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{als } x = y, \\ 1, & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

Toon aan dat (X, d) volledig is.

2. Laat (X, d) een metrische ruimte zijn.

- (5) a. Een verzameling $A \subseteq X$ heet *totaal begrensd* als
- (10) b. Laat $A \subseteq X$ compact zijn. Toon aan dat A totaal begrensd is.
- (10) c. Zij $A \subseteq X$ een niet-lege compacte verzameling. Definieer $d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. Toon aan dat er $x, y \in A$ bestaan zodat $d(A) = d(x, y)$.
Tip: Gebruik convergente deelrijen.

3. Laat (X, d) een metrische ruimte zijn.

- (5) a. Een functie $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ heet *uniform continu* als
- Laat in de rest van de opgave $\{f_n : n \geq 1\} \subseteq C(X)$ equicontinu zijn. Zij $A \subseteq X$ niet-leeg en $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. Neem aan dat $f_n \rightarrow f$ puntsgewijs op A .
- (10) b. Toon aan dat f uniform continu is op A .
- (10) c. Neem aan dat $\overline{A} = X$. Bewijs dat $(f_n)_{n \geq 1}$ puntsgewijs convergent is op X .

- (5) 4. a. Formuleer de algebra-versie van de stelling van Stone–Weierstrass.

- (10) b. Laat $\mathcal{A}$ de familie functies $f : [0, 2016] \rightarrow \mathbb{R}$ zijn die geschreven kunnen worden als

$$f(x) = a_0 + a_1 x^4 + a_2 x^8 + a_3 x^{12} + \dots + a_n x^{4n}$$

met $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$. Laat zien dat $\mathcal{A}$ dicht ligt in $C([0, 2016])$.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1.$$

EINDE