

1. Laat (X, d) een metrische ruimte zijn.

(5) a. Vul de volgende definitie aan: Een verzameling $O \subseteq X$ heet *open* als

(10) b. Laat $A \subseteq X$ een niet-lege verzameling zijn. Bewijs de volgende equivalentie door alleen gebruik te maken van de definities:

A is gesloten $\iff$ voor iedere rij $(x_n)_{n \geq 1}$ in A en $x \in X$ geldt: als $x_n \rightarrow x$ dan $x \in A$.

(10) c. Laat d de discrete metriek op X zijn, dat wil zeggen

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{als } x = y, \\ 1, & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

Toon aan dat (X, d) volledig is.

2. Laat (X, d) een metrische ruimte zijn.

(5) a. Een verzameling $A \subseteq X$ heet *totaal begrensd* als

(10) b. Laat $A \subseteq X$ compact zijn. Toon aan dat A totaal begrensd is.

(10) c. Zij $A \subseteq X$ een niet-lege compacte verzameling. Definieer $d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. Toon aan dat er $x, y \in A$ bestaan zodat $d(A) = d(x, y)$.

Tip: Gebruik convergente deelrijen.

3. Laat (X, d) een metrische ruimte zijn.

(5) a. Een functie $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ heet *uniform continu* als

Laat in de rest van de opgave $\{f_n : n \geq 1\} \subseteq C(X)$ equicontinu zijn. Zij $A \subseteq X$ niet-leeg en $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. Neem aan dat $f_n \rightarrow f$ puntsgewijs op A .

(10) b. Toon aan dat f uniform continu is op A .

(10) c. Neem aan dat $\overline{A} = X$. Bewijs dat $(f_n)_{n \geq 1}$ puntsgewijs convergent is op X .

(5) 4. a. Formuleer de algebra-versie van de stelling van Stone–Weierstrass.

(10) b. Laat $\mathcal{A}$ de familie functies $f : [0, 2016] \rightarrow \mathbb{R}$ zijn die geschreven kunnen worden als

$$f(x) = a_0 + a_1 x^4 + a_2 x^8 + a_3 x^{12} + \dots + a_n x^{4n}$$

met $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$. Laat zien dat $\mathcal{A}$ dicht ligt in $C([0, 2016])$.

EINDE

Antwoord 2c:

Ten eerste merken we op dat uit de compactheid volgt dat A begrensd is en dus $d(A) < \infty$. Voor elke $n \in \mathbb{N}$, kunnen we $x_n, y_n \in A$ vinden zodat $d(x_n, y_n) > d(A) - \frac{1}{n}$. Ook geldt $d(x_n, y_n) \leq d(A)$ en dus $d(x_n, y_n) \rightarrow d(A)$. Aangezien, $(x_n)_{n \geq 1}$ een rij in de compacte verzameling A is volgt (hier gebruiken we de karakterisering van compactheid in termen van convergente deelrijen van rijen) dat er een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ en $x \in A$ zodat $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Hernoem nu $u_k = x_{n_k}$ en $v_k = y_{n_k}$ voor $k \geq 1$. Merk op dat $(v_k)_{k \geq 1}$ een rij in A is, dus ook hier vinden we weer een convergente deelrij $(v_{k_m})_{m \geq 1}$ en een $y \in A$ zodat $\lim_{m \rightarrow \infty} v_{k_m} = y$. Er geldt nog steeds $d(u_{k_m}, v_{k_m}) \rightarrow d(A)$. Het gevraagde volgt indien we kunnen laten zien dat $d(u_{k_m}, v_{k_m}) \rightarrow d(x, y)$. Hiervoor kun je direct opmerken dat d continu is, maar je kunt het bewijs ook even afmaken: Er volgt uit de driehoeksongelijkheid dat

$$|d(u_{k_m}, v_{k_m}) - d(x, y)| \leq |d(u_{k_m}, v_{k_m}) - d(u_{k_m}, y)| + |d(u_{k_m}, y) - d(x, y)| \leq d(v_{k_m}, y) + d(u_{k_m}, x)$$

en dit laatste convergeert naar 0.

Alternatief: Toon eerst aan $A \times A$ is compact. Aangezien d continu is op $A \times A$ volgt uit een stelling uit het boek dat deze zijn maximum aanneemt op $A \times A$.

Antwoord 3c:

Zij $x \in X$. Wegens de volledigheid van $\mathbb{R}$ voldoet het te bewijzen dat $(f_n(x))_{n \geq 1}$ een Cauchy-rij is. Zij $\varepsilon > 0$. Uit de equicontinuiteit volgt dat we $\delta > 0$ kunnen vinden zodat voor alle $n \in \mathbb{N}$, en voor alle $x, y \in X$, met $d(x, y) < \delta$ geldt $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$. Kies $y \in A$ zodat $d(x, y) < \delta$ (hier gebruiken we $x \in \overline{A}$). Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N$ geldt $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/3$ (hier gebruiken we de puntsgewijze convergentie van (f_n) op A). Er volgt nu dat voor alle $m, n \geq N$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Alternatief. Maak eerst een continue uitbreiding van f via de uniforme continuïteit (zie (b)). Dan volgt. Nu kun je op eenzelfde manier afschatten:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)|.$$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1.$$

EINDE