

1. Zij $X \neq \emptyset$.

(4) a. Geef de definitie van een metriek, d , op X

Zij nu (X, d) een metrische ruimte.

(4) b. Bewijs dat $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ voor alle x, y en z in X .

Zij nu A een niet-lege deelverzameling van X en definieer voor $x \in X$

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

Bewijs de volgende uitspraken

(4) c. Als $x \in X$ dan geldt $d(x, A) = 0$ dan en slechts dan als $x \in \overline{A}$.

(4) d. Als $x, y \in X$ dan $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$.

(4) e. Als $x, y \in X$ dan $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

2. Zij (X, d) een volledige metrische ruimte en $f : X \rightarrow X$ een afbeelding waarvoor een constante c bestaat met $0 < c < 1$ en zó dat $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ voor alle x en y .

(4) a. Laat zien dat f continu is.

Neem $x_0 \in X$ vast en definieer de rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ recursief door $x_n = f(x_{n-1})$. Bewijs de volgende uitspraken.

(4) b. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1)$. *Aanwijzing:* gebruik inductie naar n .

(4) c. Voor alle n en k in $\mathbb{N}$ geldt $d(x_n, x_{n+k}) \leq \sum_{j=n}^{n+k-1} d(x_j, x_{j+1})$. *Aanwijzing:* gebruik inductie naar k .

(5) d. Uit b) en c) volgt dat voor alle n en k in $\mathbb{N}$ geldt $d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1)$.

(4) e. De rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ is een Cauchy-rij.

(4) f. Er bestaat een unieke $a \in X$ die voldoet aan $f(a) = a$.

3. We bekijken $\mathbb{R}$ met Lebesgue-maat $\lambda : \Lambda \rightarrow [0, \infty]$ (Λ is de σ -algebra van alle Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$). Gegeven $E \in \Lambda$ met $0 < \lambda(E) < \infty$ definiëren we $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(t) = \lambda((-\infty, t) \cap E)$.

(7) a. Laat zien dat f een continue functie is. *Aanwijzing:* Laat zien: als $t_n \uparrow a$ of $t_n \downarrow a$ dan $f(t_n) \rightarrow f(a)$.

Vervolg van deze opgave op de volgende bladzijde.

- (6) b. Bereken $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ en $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$.
- (7) c. Laat zien: als $0 < \alpha < \lambda(E)$ dan is er een $F \in \Lambda$ zó dat $F \subseteq E$ en $\lambda(F) = \alpha$.
4. Zij (X, Λ, λ) een maatruimte (Λ is de σ -algebra van alle μ -meetbare deelverzamelingen van X).
- (6) a. Formuleer de Gedomineerde-convergentiestelling.
- We nemen nu $X = \mathbb{R}$ en $\mu = \lambda$, de Lebesgue-maat. Zij verder $f \in L_1(\mathbb{R})$.
- (6) b. Laat zien dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ de functie $t \mapsto f(t) \sin(xt)$ integreerbaar is over $\mathbb{R}$.
- (6) c. We definiëren $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt) d\lambda(t)$. Laat zien $|g(x)| \leq \|f\|_1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
- (7) d. Laat zien dat de functie g continu is op $\mathbb{R}$. *Aanwijzing:* Laat zien dat uit $x_n \rightarrow x$ volgt dat $g(x_n) \rightarrow g(x)$; denk aan a).

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.