

Tentamen Reële Analyse, Uitwerking

22 januari 2016

1. Zij $X \neq \emptyset$.

(a) (4) Geef de definitie van een metriek d op X .

Uitwerking. Een metriek op X is een functie $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ die voldoet aan:

- (i) voor alle $x, y \in X$ is $d(x, y) \geq 0$ en $d(x, y) = 0$ dan en slechts dan als $x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle $x, y \in X$;
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ voor alle $x, y, z \in X$.

Zij nu (X, d) een metrische ruimte.

(b) (4) Bewijs dat $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ voor alle $x, y, z \in X$.

Uitwerking. Laten $x, y, z \in X$ gegeven zijn. Uit (iii) volgt dat $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ en dus is

$$d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z). \quad (1)$$

Verwisseling van y en z geeft dan dat ook

$$-(d(x, y) - d(x, z)) = d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z). \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dat $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

Zij verder $\emptyset \neq A \subseteq X$ en definieer

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}, \quad x \in X.$$

Bewijs de volgende uitspraken.

- (c) (4) Als $x \in X$, dan is $d(x, A) = 0$ dan en slechts dan als $x \in \overline{A}$.

Uitwerking. Neem eerst aan dat $d(x, A) = 0$. Uit de definitie van infimum volgt dat er voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een $a_n \in A$ bestaat zo dat $d(x, a_n) < 1/n$. Dan $d(x, a_n) \rightarrow 0$ en dus $a_n \rightarrow x$ als $n \rightarrow \infty$. Hieruit volgt dat $x \in \overline{A}$.

Neem nu aan dat $x \in \overline{A}$. Dan bestaat er een rij $(b_n)_{n=1}^\infty$ in A zo dat $b_n \rightarrow x$. Uit de definitie van $d(x, A)$ volgt dat $d(x, A) \leq d(x, b_n)$ voor alle n . Omdat $d(x, b_n) \rightarrow 0$, volgt hieruit dat $d(x, A) = 0$.

- (d) (4) Als $x, y \in X$, dan is $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$.

Uitwerking. Als $a \in A$, dan $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ en dus

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(x, a) - d(x, y) \leq d(y, a).$$

Dit voor alle $a \in A$ en dus volgt het uit de definitie van $d(y, A)$ dat $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$.

- (e) (4) Als $x, y \in X$, dan is $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Uitwerking. Uit (d) volgt dat $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Verwisseling van x en y geeft dat ook $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$. Derhalve is $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

2. Zij (X, d) een volledige metrische ruimte en $f : X \rightarrow X$ een afbeelding waarvoor een constante $0 < c < 1$ bestaat zo dat $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ voor alle $x, y \in X$.

- (a) (4) Laat zien dat f continu is.

Uitwerking. Neem $x \in X$ (vast) en laat $\varepsilon > 0$ gegeven zijn. Definieer $\delta = \varepsilon/c$. Als $y \in X$ zo dat $d(x, y) < \delta$, dan is

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) < c\delta = \varepsilon.$$

Dit laat zien dat f continu is in het punt x . Dit geldt voor alle $x \in X$ en dus is f continu (op X).

Neem $x_0 \in X$ vast en definieer de rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ recursief door $x_n = f(x_{n-1})$. Bewijs de volgende uitspraken.

- (b) (4) $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_0, x_1)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Uitwerking. Voor $n = 1$:

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq cd(x_0, x_1).$$

Stel nu dat de uitspraak waar is voor een $n \in \mathbb{N}$. Dan is

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(f(x_n), f(x_{n+1})) \\ &\leq cd(x_n, x_{n+1}) \leq c^{n+1}d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Dit is de uitspraak voor $n + 1$.

- (c) (4) Voor alle $n, k \in \mathbb{N}$ is $d(x_n, x_{n+k}) \leq \sum_{j=n}^{n+k-1} d(x_j, x_{j+1})$.

Uitwerking. Neem $n \in \mathbb{N}$ vast. Voor $k = 1$ is er niets te bewijzen. Stel nu dat de uitspraak waar is voor een $k \in \mathbb{N}$. Dan is

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k+1}) &\leq d(x_n, x_{n+k}) + d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\ &\leq \sum_{j=n}^{n+k-1} d(x_j, x_{j+1}) + d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\ &= \sum_{j=n}^{n+k} d(x_j, x_{j+1}), \end{aligned}$$

en dit is de uitspraak voor $k + 1$.

- (d) (5) Uit (b) en (c) volgt dat voor alle $n, k \in \mathbb{N}$ geldt dat $d(x_n, x_{n+k}) \leq c^n (1 - c)^{-1} d(x_0, x_1)$.

Uitwerking. Voor $n, k \in \mathbb{N}$ is

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k}) &\leq \sum_{j=n}^{n+k-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=n}^{n+k-1} c^j d(x_0, x_1) \\ &= c^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{k-1} c^j \leq c^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{\infty} c^j \\ &= c^n (1 - c)^{-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

(omdat $0 < c < 1$).

- (e) (4) De rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ is een Cauchy rij.

Uitwerking. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Omdat $c^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $c^n (1 - c)^{-1} d(x_0, x_1) < \varepsilon$ voor alle $n \geq N$. Voor $n, m \in \mathbb{N}$ met $m > n \geq N$ volgt nu uit (d) dat

$$d(x_n, x_m) \leq c^n (1 - c)^{-1} d(x_0, x_1) < \varepsilon.$$

Derhalve is $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een Cauchy rij.

- (f) (4) Er bestaat een unieke $a \in X$ die voldoet aan $f(a) = a$.

Uitwerking. Omdat X volledig is, bestaat er een $a \in X$ zo dat $x_n \rightarrow a$. Omdat f continu is (zie (a)), volgt dat $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Nu is $f(x_n) = x_{n+1}$ en ook $x_{n+1} \rightarrow a$, dus $f(x_n) \rightarrow a$. Omdat limieten uniek zijn, volgt dat $f(a) = a$.

Als $a, b \in X$ zo dat $f(a) = a$ en $f(b) = b$, dan is $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq cd(a, b)$. Omdat $c < 1$, volgt hieruit dat $d(a, b) = 0$ en dus $a = b$.

3. We bekijken $\mathbb{R}$ met Lebesgue maat $\lambda : \Lambda \rightarrow [0, \infty]$ (Λ is de σ -algebra van alle Lebesgue meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$). Gegeven $E \in \Lambda$ met $0 < \lambda(E) < \infty$ definiëren we $f(t) = \lambda((-\infty, t) \cap E)$, $t \in \mathbb{R}$.

- (a) (7) Laat zien dat f een continue functie is.

Uitwerking. Neem $t \in \mathbb{R}$ vast. Zij $(t_n)_{n=1}^\infty$ een rij in $\mathbb{R}$ zo dat $t_n \uparrow t$. Dan geldt $(-\infty, t_n) \uparrow (-\infty, t)$ en dus $(-\infty, t_n) \cap E \uparrow (-\infty, t) \cap E$. Hieruit volgt dat $\lambda((-\infty, t_n) \cap E) \uparrow \lambda((-\infty, t) \cap E)$, maw. $f(t_n) \uparrow f(t)$. Dit laat zien dat f links-continu is in t .

Zij nu $(t_n)_{n=1}^\infty$ een rij in $\mathbb{R}$ zo dat $t_n \downarrow t$. We mogen aannemen dat $t_n > t$ voor alle n (anders is er niets te bewijzen). Dan geldt $(-\infty, t_n) \downarrow (-\infty, t]$ en dus $(-\infty, t_n) \cap E \downarrow (-\infty, t] \cap E$. Omdat $\lambda(E) < \infty$ volgt hieruit dat $\lambda((-\infty, t_n) \cap E) \downarrow \lambda((-\infty, t] \cap E)$. Nu is $\lambda((-\infty, t] \cap E) = \lambda((-\infty, t) \cap E)$ (want $\lambda(\{t\}) = 0$) en we vinden dat $f(t_n) \downarrow f(t)$. Dit laat zien dat f rechts-continu is in t . Derhalve is f continu in t .

- (b) (6) Bereken $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ en $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$.

Uitwerking. Als $(t_n)_{n=1}^\infty$ een rij is in $\mathbb{R}$ zo dat $t_n \uparrow \infty$, dan $E \cap (-\infty, t_n) \uparrow E$ en dus $\lambda(E \cap (-\infty, t_n)) \uparrow \lambda(E)$, maw. $f(t_n) \uparrow \lambda(E)$. Dit laat zien dat $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lambda(E)$.

Als $(t_n)_{n=1}^\infty$ een rij is in $\mathbb{R}$ zo dat $t_n \downarrow -\infty$, dan $E \cap (-\infty, t_n) \downarrow \emptyset$ en dus $\lambda(E \cap (-\infty, t_n)) \downarrow 0$ (want $\lambda(E) < \infty$), maw. $f(t_n) \downarrow 0$. Dit laat zien dat $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$.

- (c) (7) Laat zien: Als $0 < \alpha < \lambda(E)$, dan is er een $F \in \Lambda$ zodat $F \subseteq E$ en $\lambda(F) = \alpha$.

Uitwerking. Omdat $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$, bestaat er een $t_1 \in \mathbb{R}$ zo dat $f(t_1) < \alpha$. Omdat $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lambda(E)$ bestaat er een $t_2 \in \mathbb{R}$ (met $t_1 < t_2$) zo dat $f(t_2) > \alpha$. Omdat f continu is op $[t_1, t_2]$ volgt uit de tussenwaardstelling dat er een $t_0 \in [t_1, t_2]$ bestaat zo dat $f(t_0) = \alpha$. Dan is dus $\lambda(E \cap (-\infty, t_0)) = \alpha$. Derhalve kunnen we $F = E \cap (-\infty, t_0)$ nemen.

4. Zij (X, Λ, μ) een maatruimte (Λ is de σ -algebra van alle μ -meetbare deelverzamelingen van X).

- (a) (6) Formuleer de gedomineerde convergentiestelling.

Uitwerking. Zij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een rij μ -integreerbare functies op X en zij $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ zo dat $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ μ -b.o op X . Als er een μ -integreerbare $g : X \rightarrow [0, \infty)$ bestaat zo dat $|f_n| \leq g$ μ -b.o. voor alle n , dan is f μ -integreerbaar en $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

We nemen nu $X = \mathbb{R}$ en $\mu = \lambda$, de Lebesgue maat. Zij $f \in L_1(\mathbb{R})$.

- (b) (6) Laat zien dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ de functie $t \mapsto f(t) \sin(xt)$, $t \in \mathbb{R}$, integreerbaar is over $\mathbb{R}$.

Uitwerking. De functies f en $t \mapsto \sin(xt)$, $t \in \mathbb{R}$ zijn beide λ -meetbaar (want $t \mapsto \sin(xt)$ is continu). Derhalve is de functie $t \mapsto f(t) \sin(xt)$, $t \in \mathbb{R}$, λ -meetbaar. Voor iedere $t \in \mathbb{R}$ geldt dat $|f(t) \sin(xt)| \leq |f(t)|$. Omdat f λ -integreerbaar is over $\mathbb{R}$, volgt nu dat ook $t \mapsto f(t) \sin(xt)$, $t \in \mathbb{R}$, λ -integreerbaar is over $\mathbb{R}$.

- (c) (6) We definiëren $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt) d\lambda(t)$, $x \in \mathbb{R}$. Laat zien dat $|g(x)| \leq \|f\|_1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Uitwerking. Voor $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt) d\lambda(t) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t) \sin(xt)| d\lambda(t) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| d\lambda(t) = \|f\|_1. \end{aligned}$$

- (d) (7) Laat zien dat de functie g continu is op $\mathbb{R}$.

Uitwerking. Neem $x \in \mathbb{R}$ (vast) en zij $(x_n)_{n=1}^\infty$ een rij in $\mathbb{R}$ zo dat $x_n \rightarrow x$. Omdat de functie $\sin$ continu is, volgt dat $f(t) \sin(x_n t) \rightarrow f(t) \sin(xt)$ als $n \rightarrow \infty$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Verder is $|f(t) \sin(x_n t)| \leq |f(t)|$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Omdat de functie $|f|$ integreerbaar is over $\mathbb{R}$ volgt nu uit de gedomineerde convergentiestelling (zie (a)) dat

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt) d\lambda(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(x_n t) d\lambda(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n). \end{aligned}$$

We concluderen dat g continu is in het punt x . Dit voor iedere $x \in \mathbb{R}$, derhalve is g continu op $\mathbb{R}$.