

Tentamen Reële Analyse, Uitwerking

14 augustus 2015, 14.00-17.00

1. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ definiëren we

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

- (a) (5) Laat zien dat d een metriek is op $\mathbb{R}$.

Uitwerking. Het is duidelijk dat $d(x, y) \geq 0$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Als $x, y \in \mathbb{R}$, dan

$$d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

Omdat $|x - y| = |y - x|$, is ook duidelijk dat $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Nu de driehoeksongelijkheid. Gegeven $x, y, z \in \mathbb{R}$ is $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ en omdat de functie $t \mapsto t/(1+t)$, $t \in \mathbb{R}$, stijgend is, volgt hieruit dat

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \leq \frac{|x - z| + |z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|} \\ &= \frac{|x - z|}{1 + |x - z| + |z - y|} + \frac{|z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|} \\ &\leq \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|} = d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

- (b) (5) Bereken de diameter van $\mathbb{R}$ m.b.t. de metriek d .

Uitwerking. De diameter $d(\mathbb{R})$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned} d(\mathbb{R}) &= \sup \{d(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \sup_{x, y \in \mathbb{R}} \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \\ &= \sup_{t \geq 0} \frac{t}{1 + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{1 + t} = 1. \end{aligned}$$

(c) (5) Bewijs: voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zo dat

- (i) als $x, y \in \mathbb{R}$ en $|x - y| < \delta$, dan $d(x, y) < \varepsilon$;
- (ii) als $x, y \in \mathbb{R}$ en $d(x, y) < \delta$, dan $|x - y| < \varepsilon$.

Uitwerking. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Omdat $d(x, y) \leq |x - y|$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, volgt uit $|x - y| < \varepsilon$ dat $d(x, y) < \varepsilon$.

Omdat de functie $t \mapsto t/(1+t)$, $t \in \mathbb{R}$, strict stijgend is, volgt uit $x, y \in \mathbb{R}$ en $d(x, y) < \varepsilon/(1+\varepsilon)$ dat $|x - y| < \varepsilon$. We kunnen dus $\delta = \min(\varepsilon, \varepsilon/(1+\varepsilon)) = \varepsilon/(1+\varepsilon)$ nemen.

(b) (5) Laat zien dat $(\mathbb{R}, d)$ een volledige metrische ruimte is.

Uitwerking. Zij $(x_n)_{n=1}^\infty$ een d -Cauchy rij in $\mathbb{R}$. Gegeven $\varepsilon > 0$ is er volgens (c) een $\delta > 0$ zo dat uit $x, y \in \mathbb{R}$ en $d(x, y) < \delta$ volgt dat $|x - y| < \varepsilon$. Omdat (x_n) een d -Cauchy rij is, bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $d(x_n, x_m) < \delta$ voor alle $n, m \geq N$ en dus $|x_n - x_m| < \varepsilon$ voor alle $n, m \geq N$. Dit laat zien dat (x_n) een Cauchy rij is in $\mathbb{R}$ mbt. de standaard (Euklidische) metriek. Omdat $\mathbb{R}$ volledig is mbt. de standaard metriek, bestaat er een $x \in \mathbb{R}$ zodanig dat $|x - x_n| \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Omdat $d(x, x_n) \leq |x - x_n|$ volgt nu dat $d(x, x_n) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. We zijn klaar.

2. Zij (X, d) een compacte metrische ruimte. We beschouwen $C(X)$ voorzien met de uniforme norm $\|\cdot\|_\infty$ (en corresponderende uniforme metriek). Bewijs de volgende uitspraken.

(a) (8) Zij $L \subseteq C(X)$ een lineaire deelruimte met $\mathbf{1} \in L$ ($\mathbf{1}(x) = 1$, $x \in X$) die dicht is in $C(X)$. Als $f \in C(X)$ en $x_0 \in X$ zo dat $f(x_0) = 0$, dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $g \in L$ zo dat $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ en $g(x_0) = 0$.

Uitwerking. Omdat L dicht ligt in $C(X)$, bestaat er een $h \in L$ zo dat $\|f - h\|_\infty < \varepsilon/2$. Dan is i.h.b. $|h(x_0)| = |f(x_0) - h(x_0)| < \varepsilon/2$. Zij nu $g = h - h(x_0)\mathbf{1}$. Dan is $g \in L$ en $g(x_0) = 0$. Voor alle $x \in X$ is

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq \|f - h\|_\infty + |h(x_0)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Derhalve is $\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. Hieruit volgt het gevraagde.

Neem $p \in X$ vast en definieer

$$C_p(X) = \{f \in C(X) : f(p) = 0\}.$$

- (b) (5) Dan is $C(X) = \{f + \lambda \mathbf{1} : f \in C_p(X), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Uitwerking. Het is duidelijk dat $\{f + \lambda \mathbf{1} : f \in C_p(X), \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq C(X)$.

Laat $g \in C(X)$ gegeven zijn. We definiëren $\lambda = g(p)$ en $f = g - \lambda \mathbf{1}$. Dan is $f \in C_p(X)$ en $g = f + \lambda \mathbf{1}$. Klaar!

Zij nu $\mathcal{A}$ een deelalgebra van $C_p(X)$ die de punten van X scheidt.

- (c) (5) Toon aan: $\mathcal{A}_1 = \{f + \lambda \mathbf{1} : f \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ is een algebra in $C(X)$.

Uitwerking. Het is duidelijk dat $\mathcal{A}_1$ een lineaire deelruimte van $C(X)$ is. Neem nu $g_1, g_2 \in \mathcal{A}_1$ en schrijf $g_j = f_j + \lambda_j \mathbf{1}$ met $f_j \in \mathcal{A}$ en $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$). Dan is

$$g_1 g_2 = (f_1 f_2 + \lambda_1 f_2 + \lambda_2 f_1) + \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{1}.$$

Omdat $\mathcal{A}$ een algebra is, volgt dat $f_1 f_2 + \lambda_1 f_2 + \lambda_2 f_1 \in \mathcal{A}$. Derhalve is $g_1 g_2 \in \mathcal{A}_1$ en dus is $\mathcal{A}_1$ een algebra in $C(X)$.

- (d) (7) Laat zien: de algebra $\mathcal{A}$ ligt dicht in $C_p(X)$.

Uitwerking. Laat $\mathcal{A}_1$ de algebra in $C(X)$ zijn zoals gedefinieerd in (c). Duidelijk is $\mathbf{1} \in \mathcal{A}_1$. Omdat $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_1$ en $\mathcal{A}$ scheidt de punten van X , is het duidelijk dat ook $\mathcal{A}_1$ de punten van X scheidt.

Uit de stelling van Stone-Weierstrass volgt nu dat $\mathcal{A}_1$ dicht ligt in $C(X)$. Gegeven $f \in C_p(X)$ en $\varepsilon > 0$, volgt nu uit (a) dat er een $g \in \mathcal{A}_1$ bestaat zo dat $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ en $g(p) = 0$. Nu volgt uit $g \in \mathcal{A}_1$ en $g(p) = 0$ dat $g \in \mathcal{A}$. We mogen concluderen dat $\mathcal{A}$ dicht ligt in $C_p(X)$. Klaar!

3. Zij (X, Λ, μ) een maatruimte (Λ is de σ -algebra van alle μ -meetbare deelverzamelingen van X).

- (a) (5) Formuleer het Lemma van Fatou.

Uitwerking. Als $(f_n)_{n=1}^\infty$ een rij is in $L_1(\mu)^+$ zo dat

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu < \infty,$$

dan is $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \in L_1(\mu)^+$ en

$$\int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

- (b) (5) Zij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een rij in $L_1(\mu)$ zo dat $\int_X |f_n| d\mu \leq 1$ voor alle n en zij $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ zo dat $f_n \rightarrow f$ μ -b.o. Laat zien dat $f \in L_1(\mu)$ en dat $\int_X |f| d\mu \leq 1$.

Uitwerking. Uit $\int_X |f_n| d\mu \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ volgt dat $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu \leq 1$. Omdat $|f| = \lim |f_n| = \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|$ μ -b.o., volgt nu uit het Lemma van Fatou dat $|f| \in L_1(\mu)$ (en dus, $f \in L_1(\mu)$) met

$$\int_X |f| d\mu = \int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n| \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu \leq 1.$$

- (c) (5) Geef een voorbeeld van een rij $(f_n)_{n=1}^\infty$ en een functie f als in (b) zo dat $\int_X |f_n| d\mu = 1$ voor alle n en $\int_X |f| d\mu < 1$.

Uitwerking. Neem $X = \mathbb{R}$ met Lebesgue maat λ . Voor $n \in \mathbb{N}$, definieer $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$. Dan is $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1$ voor alle n . Echter, $f_n \rightarrow 0$ λ -b.o.

- (d) (5) Zij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een rij in $L_1(\mu)^+$ en $f \in L_1(\mu)^+$ zo dat $f_n \rightarrow f$ μ -b.o. en $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$ als $n \rightarrow \infty$. Laat zien dat voor alle $E \in \Lambda$ geldt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Uitwerking. Noem $a_n = \int_E f_n d\mu$ en $b_n = \int_{X \setminus E} f_n d\mu$, ($n = 1, 2, \dots$). Uit het Lemma van Fatou volgt dat

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{en} \quad \int_{X \setminus E} f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Nu is

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} (-b_n) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu - \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &\leq \int_X f d\mu - \int_{X \setminus E} f d\mu = \int_E f d\mu, \end{aligned}$$

waaruit volgt dat $\int_E f d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ en dus $\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$.

4. Zij λ de Lebesgue maat op de σ -algebra Λ van alle Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. We noteren met $\mathcal{S}$ de half-ring van alle cellen $(a, b]$ (met $a \leq b$ in $\mathbb{R}$). Zij $f \in L_1(\mathbb{R})$.

- (a) (5) Laat zien: als $(E_n)_{n=1}^\infty$ een disjuncte rij is in Λ en $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, dan is

$$\int_E f d\lambda = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\lambda.$$

Uitwerking. Noemen we $F_k = \bigcup_{n=1}^k E_n$ dan $F_k \uparrow_k E$ en dus $\chi_{F_k} = \sum_{n=1}^k \chi_{E_n} \uparrow_k \chi_E$. Hieruit volgt dat $f\chi_{F_k} \rightarrow f\chi_E$ op $\mathbb{R}$. Omdat $|f\chi_{F_k}| \leq |f|$ voor alle k volgt via de gedomineerde convergentie stelling dat

$$\begin{aligned} \int_E f d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} f \chi_E d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f \chi_{F_k} d\lambda \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f \left(\sum_{n=1}^k \chi_{E_n} \right) d\mu \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_{E_n} f d\lambda = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\lambda. \end{aligned}$$

We nemen nu aan dat $\int_{-\infty}^x f d\lambda = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Bewijs de volgende uitspraken.

- (b) (4) Voor alle $(a, b] \in \mathcal{S}$ is $\int_{(a,b]} f d\lambda = 0$.

Uitwerking. Voor $a < b$ in $\mathbb{R}$ is

$$\int_{(a,b]} f d\lambda = \int_{-\infty}^b f d\lambda - \int_{-\infty}^a f d\lambda = 0.$$

- (c) (4) Voor iedere σ -verzameling A (mbt. $\mathcal{S}$) is $\int_A f d\lambda = 0$.

Uitwerking. Als A een σ -verzameling is, dan kunnen we A schrijven als $A = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$ met $C_n \in \mathcal{S}$ en $C_n \cap C_m = \emptyset$ als $n \neq m$. Via (a) en (b) volgt nu dat

$$\int_A f d\lambda = \sum_{n=1}^\infty \int_{C_n} f d\lambda = 0.$$

- (d) (4) Als $F \subseteq X$ en $(A_n)_{n=1}^\infty$ is een rij σ -verzamelingen zo dat $A_n \downarrow F$ (maw., F is een σ_δ -verzameling), dan is $\int_F f d\lambda = 0$.

Uitwerking. Uit $A_n \downarrow F$ volgt dat $\chi_{A_n} \downarrow_n \chi_F$ op $\mathbb{R}$ en dus $f\chi_{A_n} \rightarrow f\chi_F$ puntgewijs op $\mathbb{R}$. Omdat $|f\chi_{A_n}| \leq |f|$ voor alle n en $f \in L_1(\mu)$, volgt via de gedomineerde convergentie stelling dat

$$\int_F f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f\chi_F d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f\chi_{A_n} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f d\lambda.$$

Uit (c) weten we dat $\int_{A_n} f d\lambda = 0$ voor alle n . Derhalve is $\int_F f d\mu = 0$.

- (e) (4) Als $E \in \Lambda$, dan is $\int_E f d\lambda = 0$ (welke stelling wordt er gebruikt?).

Uitwerking. Zij $E \in \Lambda$ gegeven. Omdat de Lebesgue maat λ σ -eindig is, bestaat er een σ_δ -verzameling F (mbt. $\mathcal{S}$) zodanig dat $E \subseteq F$ en $\lambda(F \setminus E) = 0$ (dit is een stelling die tijdens het college is behandeld). Nu is

$$\int_F f d\lambda = \int_E f d\lambda + \int_{F \setminus E} f d\lambda = \int_E f d\lambda,$$

want $\int_{F \setminus E} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f\chi_{F \setminus E} d\mu = 0$ omdat $f\chi_{F \setminus E} = 0$ λ -b.o. Uit (d) volgt dat $\int_F f d\lambda = 0$ en dus is ook $\int_E f d\lambda = 0$.

- (f) (4) Nu volgt dat $f = 0$ λ -b.o.

Uitwerking. Noem $E_+ = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$. Omdat f een Lebesgue meetbare functie is, volgt dat $E_+ \in \Lambda$. Uit (e) volgt dat $\int_{E_+} f d\lambda = 0$. Omdat $f \geq 0$ op E_+ volgt hieruit dat $f = 0$ λ -b.o. op E_+ . Derhalve is $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}) = 0$.

Passen we ditzelfde argument toe op de functie $-f$, dan volgt dat ook $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}) = 0$. We mogen concluderen dat $f = 0$ λ -b.o.