
Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Met iedere opgave zijn 25 punten te verdienen (in totaal dus 100 punten). De normering per onderdeel staat tussen haakjes aangegeven. Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.

1. Zij $X \neq \emptyset$.
 - (5) a. Geef de definitie van een metriek d op X .
Zij nu (X, d) een metrische ruimte en zij $(x_n)_{n=1}^\infty$ een rij in X .
 - (5) b. Wanneer heet de rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ convergent?
 - (5) c. Wanneer heet $(x_n)_{n=1}^\infty$ een Cauchy-rij?
 - (10) d. Neem aan dat $(x_n)_{n=1}^\infty$ een Cauchy-rij is. Laat zien: als $(x_n)_{n=1}^\infty$ een convergente deelrij heeft, dan is $(x_n)_{n=1}^\infty$ convergent.
2. Zij (X, d) een metrische ruimte en $A \subseteq X$.
 - (4) a. Wat is een open overdekking van A ?
 - (4) b. Wanneer heet de deelverzameling A compact?
 - (7) c. Bewijs: als A compact is, dan is A gesloten.
Zij nu (X, d) een compacte metrische ruimte.
 - (10) d. Laat zien: als $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) continue functies zijn zo dat $f_n(x) \downarrow_n 0$ voor alle $x \in X$, dan $f_n \rightarrow 0$ uniform op X als $n \rightarrow \infty$.
3. Zij $\mathcal{B}$ de Borel σ -algebra in $\mathbb{R}$.
 - (4) a. Laat zien dat $[a, b) \in \mathcal{B}$ voor alle $a \leq b$ in $\mathbb{R}$.
Zij $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ een maat met $\mu(\mathbb{R}) = 1$ en definieer $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ door $f(x) = \mu((-\infty, x))$, $x \in \mathbb{R}$.
 - (8) b. Laat zien: f is stijgend, f is links-continu, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.
Laat $\mathcal{S}$ de half-ring van cellen $[a, b)$, met $a \leq b$ in $\mathbb{R}$, zijn. We definiëren $\mu_f : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ door $\mu_f([a, b)) = f(b) - f(a)$ voor $[a, b) \in \mathcal{S}$.
 - (3) c. Laat zien dat $\mu_f([a, b)) = \mu([a, b))$ voor alle $[a, b) \in \mathcal{S}$ (en dus is μ_f een maat op $\mathcal{S}$).
De collectie van alle μ_f^* -meetbare verzamelingen noteren we met Λ .
 - (5) d. Bewijs dat $\mathcal{B} \subseteq \Lambda$.
 - (5) e. Leg uit waarom $\mu(B) = \mu_f^*(B)$ voor alle $B \in \mathcal{B}$.

Zie ook de volgende bladzijde.

4. Zij λ de Lebesgue-maat op de σ -algebra Λ van alle Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

- (6) a. Laat zien: als $x \in [0, 1)$ en $(x_n)_{n=1}^\infty$ is een rij in $[0, 1)$ zo dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, dan $\chi_{[0, x_n)} \rightarrow \chi_{[0, x)}$ λ -b.o.

Zij nu $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integreerbaar. Voor $x \in [0, 1)$ definiëren we

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt = \int_{[0, x)} f(t) \, dt.$$

- (6) b. Bewijs dat $F : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ continu is.
- (3) c. Laat zien: als $F_n \subseteq [0, 1)$ en $F_n \in \Lambda$ ($n = 1, 2, \dots$) zo dat $F_n \downarrow_n$ en $\lambda(F_n) \rightarrow 0$, dan $\chi_{F_n} \rightarrow 0$ λ -b.o.
- (3) d. Laat zien: als $F_n \subseteq [0, 1)$ en $F_n \in \Lambda$ ($n = 1, 2, \dots$) zo dat $F_n \downarrow_n$ en $\lambda(F_n) \rightarrow 0$, dan $\int_{F_n} |f| \, d\lambda \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.
- (7) e. Laat zien: als $E_n \subseteq [0, 1)$ en $E_n \in \Lambda$ ($n = 1, 2, \dots$) zo dat $\lambda(E_n) \rightarrow 0$, dan $\int_{E_n} |f| \, d\lambda \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. (Aanwijzing: zo niet, dan is er een $\varepsilon > 0$ en een deelrij $(E_{n_k})_{k=1}^\infty$ zo dat $\lambda(E_{n_k}) \leq 2^{-k}$ en $\int_{E_{n_k}} |f| \, d\lambda \geq \varepsilon$; bekijk nu $F_k = \bigcup_{j=k}^\infty E_{n_j}$.)