

# Tentamen Reële Analyse, Uitwerking

## 1 juli 2015, 14.00-17.00

1. Zij  $X \neq \emptyset$ .

(a) (5) Geef de definitie van een metriek  $d$  op  $X$ .

**Uitwerking.** Een metriek is een functie  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  zo dat voor alle  $x, y, z \in X$ :

(i)  $d(x, y) \geq 0$  en  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;

(ii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;

(iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Zij nu  $(X, d)$  een metrische ruimte en zij  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  een rij in  $X$ .

(b) (5) Wanneer heet de rij  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  convergent?

**Uitwerking.** De rij  $(x_n)$  heet convergent als er een  $x \in X$  bestaat zo dat voor iedere  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  een  $N \in \mathbb{N}$  bestaat zdd  $|x_n - x| < \varepsilon$  voor alle  $n \geq N$ .

(c) (5) Wanneer heet  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  een Cauchy-rij?

**Uitwerking.** De rij  $(x_n)$  heet een Cauchy-rij als voor iedere  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  er een  $N \in \mathbb{N}$  bestaat zdd  $|x_n - x_m| < \varepsilon$  voor alle  $n, m \geq N$ .

(d) (10) Neem aan dat  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  een Cauchy-rij is. Laat zien: als  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  een convergente deelrij heeft, dan is  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  convergent.

**Uitwerking.** Zij  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  een deelrij van  $(x_n)$  en zij  $x \in X$  zo dat  $x_{n_k} \rightarrow x$  ( $k \rightarrow \infty$ ). We laten zien dat  $x_n \rightarrow x$ . Laat  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  gegeven zijn. Omdat  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  een Cauchy-rij is, bestaat er een  $N \in \mathbb{N}$  zo dat  $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$  voor alle  $n, m \geq N$ . Omdat  $x_{n_k} \rightarrow x$ , bestaat er een  $K \in \mathbb{N}$  zo dat  $|x - x_{n_k}| < \varepsilon/2$  voor alle  $k \geq K$ . Neem nu  $k \in \mathbb{N}$  zo dat  $k \geq K$  en  $n_k \geq N$ . Voor  $n \geq N$  is dan

$$|x - x_n| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dit laat zien dat  $x_n \rightarrow x$ .

2. Zij  $(X, d)$  een metrische ruimte en  $A \subseteq X$ .

(a) (4) Wat is een open overdekking van  $A$ ?

**Uitwerking.** Een open overdekking van  $A$  is een collectie  $\{O_i\}_{i \in I}$  van open verzamelingen in  $X$  zo dat  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$  (hierbij is  $I$  een willekeurige index verzameling).

(b) (4) Wanneer heet de deelverzameling  $A$  compact?

**Uitwerking.** De deelverzameling  $A$  van  $X$  heet compact als iedere open overdekking van  $A$  een eindige deelooverdekking heeft, dwz. als  $\{O_i\}_{i \in I}$  een open overdekking van  $A$  is, dan bestaan er eindig veel  $i_1, \dots, i_n \in I$  zo dat  $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}$ .

(c) (7) Bewijs: als  $A$  compact is, dan is  $A$  gesloten.

**Uitwerking.** We laten zien dat  $A^c = X \setminus A$  open is, dwz. voor iedere  $x_0 \in A^c$  is er een  $0 < r \in \mathbb{R}$  zo dat  $B(x_0, r) \subseteq A^c$ . We mogen aannemen dat  $A^c \neq \emptyset$ .

Neem  $x_0 \in A^c$ . Voor iedere  $x \in A$  is  $d(x, x_0) > 0$ . Noem  $r_x = (1/2)d(x, x_0) > 0$  voor  $x \in A$  en merk op dat  $B(x, r_x) \cap B(x_0, r_x) = \emptyset$  (immers, als  $y \in B(x, r_x) \cap B(x_0, r_x)$ , dan zou  $d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) < 2r_x = d(x, x_0)$ , een tegenspraak). Nu is

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x).$$

Omdat  $A$  compact is, bestaan er eindig veel  $x_1, \dots, x_n \in A$  zo dat

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, r_{x_k}). \quad (1)$$

Zij nu  $r = \min(r_{x_1}, \dots, r_{x_n}) > 0$ . Dan is  $B(x_k, r_{x_k}) \cap B(x_0, r) = \emptyset$  voor  $k = 1, \dots, n$  en derhalve is

$$\left( \bigcup_{k=1}^n B(x_k, r_{x_k}) \right) \cap B(x_0, r) = \emptyset.$$

Uit (1) volgt nu dat  $A \cap B(x_0, r) = \emptyset$ , maw.  $B(x_0, r) \subseteq A^c$ . We zijn klaar.

Zij nu  $(X, d)$  een compacte metrische ruimte.

(d) (10) Laat zien: als  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) continue functies zijn zo dat  $f_n(x) \downarrow 0$  voor alle  $x \in X$ , dan  $f_n \rightarrow 0$  uniform op  $X$  als  $n \rightarrow \infty$ .

**Uitwerking.** Zij  $\varepsilon > 0$  gegeven. Voor  $n \in \mathbb{N}$  definiëren we

$$O_n = \{x \in X : f_n(x) < \varepsilon\}.$$

Iedere  $O_n$  is open omdat  $f_n$  continu is. Omdat  $f_n(x) \downarrow_n 0$  voor iedere  $x \in X$ , volgt dat

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n, \text{ en } O_n \subseteq O_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Uit de compactheid van  $X$  volgt dat er eindig veel  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  bestaan zo dat

$$X = \bigcup_{j=1}^k O_{n_j}.$$

Noemen we  $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ , dan volgt uit (2) dat  $X = O_n$  voor alle  $n \geq N$ . Derhalve is  $0 \leq f_n(x) < \varepsilon$  voor alle  $x \in X$  en  $n \geq N$ . We concluderen dat  $f_n \rightarrow 0$  uniform op  $X$  als  $n \rightarrow \infty$ .

3. Zij  $\mathcal{B}$  de Borel  $\sigma$ -algebra in  $\mathbb{R}$ .

(a) (4) Laat zien dat  $[a, b] \in \mathcal{B}$  voor alle  $a \leq b$  in  $\mathbb{R}$ .

**Uitwerking.** Voor  $n \in \mathbb{N}$  is  $I_n = (a - \frac{1}{n}, b)$  open en dus  $I_n \in \mathcal{B}$ . Omdat  $\mathcal{B}$  een  $\sigma$ -algebra is, volgt nu dat  $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{B}$ .

Zij  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  een maat met  $\mu(\mathbb{R}) = 1$  en definieer  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  door  $f(x) = \mu((-\infty, x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(b) (8) Laat zien :  $f$  is stijgend,  $f$  is links continu,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  en  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ .

**Uitwerking.** Als  $x \leq y$  in  $\mathbb{R}$ , dan is  $(-\infty, x) \subseteq (-\infty, y)$  en dus is

$$f(x) = \mu((-\infty, x)) \leq \mu((-\infty, y)) = f(y)$$

(want  $\mu$  is monotoon).

Neem  $x \in \mathbb{R}$  en zij  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  een rij in  $\mathbb{R}$  zodat  $x_n < x$  voor alle  $n$  en  $x_n \uparrow_n x$ . Dan volgt dat  $(-\infty, x_n) \uparrow_n (-\infty, x)$  en dus

$$f(x_n) = \mu((-\infty, x_n)) \uparrow_n \mu((-\infty, x)) = f(x).$$

Dit laat zien dat  $f$  links continu is in  $x$

Zij  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  een rij in  $\mathbb{R}$  zo dat  $x_n \downarrow_n -\infty$ . Dan geldt  $(-\infty, x_n) \downarrow_n \emptyset$ . Omdat  $\mu((-\infty, x_1)) < \infty$ , volgt dat  $f(x_n) = \mu((-\infty, x_n)) \downarrow_n 0$ . Dit laat zien dat  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

Zij  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  een rij in  $\mathbb{R}$  zo dat  $x_n \uparrow_n \infty$ . Dan geldt dat  $(-\infty, x_n) \uparrow_n \mathbb{R}$ . Hieruit volgt dat  $f(x_n) = \mu((-\infty, x_n)) \uparrow_n \mu(\mathbb{R}) = 1$ . Dit laat zien dat  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ .

Laat  $\mathcal{S}$  de half-ring van cellen  $[a, b)$ , met  $a \leq b$  in  $\mathbb{R}$ , zijn. We definiëren  $\mu_f : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  door  $\mu_f([a, b)) = f(b) - f(a)$  voor  $[a, b) \in \mathcal{S}$ .

- (c) (3) Laat zien dat  $\mu_f([a, b)) = \mu([a, b))$  voor alle  $[a, b) \in \mathcal{S}$  (en dus is  $\mu_f$  een maat op  $\mathcal{S}$ ).

**Uitwerking.** Als  $a \leq b$ , dan is  $[a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a)$ . Omdat  $\mu((-\infty, b)) < \infty$ , volgt nu dat

$$\mu([a, b)) = \mu((-\infty, b)) - \mu((-\infty, a)) = f(b) - f(a) = \mu_f([a, b)).$$

De collectie van alle  $\mu_f^*$ -meetbare verzamelingen noteren we met  $\Lambda$ .

- (d) (5) Bewijs dat  $\mathcal{B} \subseteq \Lambda$ .

**Uitwerking.** Omdat  $\mathcal{B}$  de  $\sigma$ -algebra is die wordt voortgebracht door alle open deelverzamelingen van  $\mathbb{R}$ , is het voldoende om te laten zien dat  $O \in \Lambda$  voor alle open  $O \subseteq \mathbb{R}$ .

Zij  $O \subseteq \mathbb{R}$  open. Als  $O = \emptyset$  dan is het duidelijk dat  $O \in \Lambda$ , dus we nemen aan dat  $O \neq \emptyset$ . Noemen we

$$\mathcal{R} = \{[a, b) \in \mathcal{S} : [a, b) \subseteq O, \quad a, b \in \mathbb{Q}\},$$

dan is  $\mathcal{R}$  een aftelbare collectie en  $\bigcup \{R : R \in \mathcal{R}\} \in \Lambda$  (immers, als  $R \in \mathcal{R}$ , dan  $R \in \mathcal{S} \subseteq \Lambda$  en  $\Lambda$  is een  $\sigma$ -algebra). Het is ook duidelijk dat  $\bigcup \{R : R \in \mathcal{R}\} \subseteq O$ . We laten nu zien dat  $O = \bigcup \{R : R \in \mathcal{R}\}$ .

Als  $x \in O$ , dan is er een  $\varepsilon > 0$  zo dat  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq O$  (want  $O$  is open). Dan bestaan er  $a, b \in \mathbb{Q}$  zodanig dat  $x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$ . Nu is  $[a, b) \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq O$  en dus  $[a, b) \in \mathcal{R}$ . Omdat  $x \in [a, b)$ , volgt hieruit dat  $x \in \bigcup \{R : R \in \mathcal{R}\}$ . Derhalve is  $O = \bigcup \{R : R \in \mathcal{R}\}$  en dus  $O \in \Lambda$ .

- (e) (5) Leg uit waarom  $\mu(B) = \mu_f^*(B)$  voor alle  $B \in \mathcal{B}$ .

**Uitwerking.** We hebben  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \Lambda$  en  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  is een maat zo dat  $\mu(A) = \mu_f(A)$  voor alle  $A \in \mathcal{S}$  (zie (c)). Omdat  $\mu_f$   $\sigma$ -eindig is ( $\mu_f^*$  is zelfs eindig!), volgt uit Theorem 15.10 dat  $\mu(B) = \mu_f^*(B)$  voor alle  $B \in \mathcal{B}$ .

4. Zij  $\lambda$  de Lebesgue maat op de  $\sigma$ -algebra  $\Lambda$  van alle Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van  $\mathbb{R}$ .

- (a) (6) Laat zien: als  $x \in [0, 1)$  en  $(x_n)_{n=1}^\infty$  is een rij in  $[0, 1)$  zo dat  $x_n \rightarrow x$  als  $n \rightarrow \infty$ , dan  $\chi_{[0, x_n)} \rightarrow \chi_{[0, x)}$   $\lambda$ -b.o.

**Uitwerking.** Neem eerst  $0 < x < 1$ . Als  $0 \leq y < x$ , dan volgt uit  $x_n \rightarrow x$  dat er een  $N \in \mathbb{N}$  bestaat zo dat  $y < x_n$  voor alle  $n \geq N$ . Dan is  $\chi_{[0,x_n)}(y) = \chi_{[0,x)}(y) = 1$  voor alle  $n \geq N$  (dus zeker  $\chi_{[0,x_n)}(y) \rightarrow \chi_{[0,x)}(y)$ ). Als  $x < y < 1$ , dan volgt uit  $x_n \rightarrow x$  dat er een  $N \in \mathbb{N}$  bestaat zo dat  $x_n < y$  voor alle  $n \geq N$ . Dan is  $\chi_{[0,x_n)}(y) = \chi_{[0,x)}(y) = 0$  voor alle  $n \geq N$  (dus zeker  $\chi_{[0,x_n)}(y) \rightarrow \chi_{[0,x)}(y)$ ). Dit laat zien dat  $\chi_{[0,x_n)}(y) \rightarrow \chi_{[0,x)}(y)$  voor alle  $y \in [0, 1) \setminus \{x\}$  en dus  $\chi_{[0,x_n)} \rightarrow \chi_{[0,x)}$   $\lambda$ -b.o. (immers,  $\lambda(\{x\}) = 0$ ).

Zij nu  $x = 0$  (in dit geval is  $\chi_{[0,x)} = \chi_\emptyset = 0$ ). Als  $0 < y < 1$ , dan volgt uit  $x_n \rightarrow x = 0$  dat er een  $N \in \mathbb{N}$  bestaat zo dat  $x_n < y$  voor alle  $n \geq N$ . Dan is  $\chi_{[0,x_n)}(y) = \chi_{\{0\}}(y) = 0$  voor alle  $n \geq N$  (dus zeker  $\chi_{[0,x_n)}(y) \rightarrow \chi_\emptyset(y)$ ). Dit laat zien dat  $\chi_{[0,x_n)}(y) \rightarrow \chi_\emptyset(y) = 0$  voor alle  $y \in [0, 1) \setminus \{0\}$  en dus  $\chi_{[0,x_n)} \rightarrow \chi_{[0,x)}$   $\lambda$ -b.o. (immers,  $\lambda(\{0\}) = 0$ ).

Zij nu  $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integreerbaar. Voor  $x \in [0, 1)$  definiëren we

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_{[0,x)} f(t) dt.$$

(b) (6) Bewijs dat  $F : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  continu is.

**Uitwerking.** Zij  $x \in X$  en  $(x_n)_{n=1}^\infty$  een rij in  $[0, 1)$  zo dat  $x_n \rightarrow x$  als  $n \rightarrow \infty$ . Uit (a) volgt dat  $f\chi_{[0,x_n)} \rightarrow f\chi_{[0,x)}$   $\lambda$ -b.o. Omdat  $|f\chi_{[0,x_n)}| \leq |f|$  en  $f$  integreerbaar is over  $[0, 1)$  volgt uit de gedomineerde convergentie stelling dat

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1)} f(t) \chi_{[0,x_n)}(t) dt \\ &= \int_{[0,1)} f(t) \chi_{[0,x)}(t) dt = F(x). \end{aligned}$$

(c) (3) Laat zien: als  $F_n \subseteq [0, 1)$  en  $F_n \in \Lambda$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) zo dat  $F_n \downarrow_n$  en  $\lambda(F_n) \rightarrow 0$ , dan  $\chi_{F_n} \rightarrow 0$   $\lambda$ -b.o.

**Uitwerking.** Noem  $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$ . Dan  $F_n \downarrow_n F$  en dus  $\lambda(F_n) \downarrow_n \lambda(F)$  (want  $\lambda(F_1) < \infty$ ). Derhalve is  $\lambda(F) = 0$ . Als  $x \in F^c$ , dan is er een  $n \in \mathbb{N}$  zdd  $x \notin F_n$  en dus,  $x \notin F_k$  voor alle  $k \geq n$ . Dit laat zien dat  $\chi_{F_n}(x) \rightarrow 0$  voor alle  $x \in F^c$ . We concluderen dat  $\chi_{F_n} \rightarrow 0$   $\lambda$ -b.o.

(d) (3) Laat zien: als  $F_n \subseteq [0, 1)$  en  $F_n \in \Lambda$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) zo dat  $F_n \downarrow_n$  en  $\lambda(F_n) \rightarrow 0$ , dan  $\int_{F_n} |f| d\lambda \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ .

**Uitwerking.** Uit (c) volgt dat  $f\chi_{F_n} \rightarrow 0$   $\lambda$ -b.o. Omdat  $|f\chi_{F_n}| \leq |f|$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$  en  $f$  integreerbaar is over  $[0, 1)$ , volgt uit de gedomineerde convergentie stelling dat

$$\int_{F_n} |f| d\lambda = \int_{[0,1)} |f| \chi_{F_n} d\lambda \rightarrow 0.$$

- (e) (7) Laat zien: als  $E_n \subseteq [0, 1)$  en  $E_n \in \Lambda$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) zo dat  $\lambda(E_n) \rightarrow 0$ , dan  $\int_{E_n} |f| d\lambda \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ .

**Uitwerking.** Neem aan dat  $E_n \subseteq [0, 1)$  en  $E_n \in \Lambda$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) zo dat  $\lambda(E_n) \rightarrow 0$  met  $\int_{E_n} |f| d\lambda \not\rightarrow 0$ . Dan is er een  $\varepsilon > 0$  zo dat er voor iedere  $N \in \mathbb{N}$  een  $n \geq N$  bestaat met  $\int_{E_n} |f| d\lambda \geq \varepsilon$ . Hieruit volgt dat er een rij  $n_1 < n_2 < \dots$  in  $\mathbb{N}$  bestaat zdd  $\lambda(E_{n_k}) \leq 2^{-k}$  en  $\int_{E_{n_k}} |f| d\lambda \geq \varepsilon$  voor alle  $k \in \mathbb{N}$ .

Definieer nu  $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_{n_j}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Nu is  $\lambda(F_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda(E_{n_j}) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-k+1}$ . Dus  $F_k \downarrow_k$  en  $\lambda(F_k) \rightarrow 0$  als  $k \rightarrow \infty$ . Nu volgt uit (d) dat  $\int_{F_k} |f| d\lambda \rightarrow 0$  als  $k \rightarrow \infty$ . Omdat  $E_{n_k} \subseteq F_k$  is ook

$$\int_{F_k} |f| d\lambda \geq \int_{E_{n_k}} |f| d\lambda \geq \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dit is een tegenspraak!