



Samenvatting

Lineaire Algebra 1 - Collegejaar 2013-2014

Dictaat met verwijzing naar het boek

Disclaimer

De informatie in dit document is afkomstig van derden. W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' betracht de grootst mogelijke zorgvuldigheid in de samenstelling van de informatie in dit document, maar garandeert niet dat de informatie in dit document compleet en/of accuraat is, noch aanvaardt W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' enige aansprakelijkheid voor directe of indirecte schade welke is ontstaan door gebruikmaking van de informatie in dit document.

De informatie in dit document wordt slechts voor algemene informatie in dit documentdoeleinden aan bezoekers beschikbaar gesteld. Elk besluit om gebruik te maken van de informatie in dit document is een zelfstandig besluit van de lezer en behoort uitsluitend tot zijn eigen verantwoordelijkheid.

LINEAIRE ALGEBRA 1 - SAMENVATTING

1. LES 1.1 - VECTOREN IN $\mathbb{R}^n$ (PAR. 1.1 UIT BOEK)

Vectoren. Vectoren worden weergegeven als $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Eigenschappen vectoren:

- ✓ Twee vectoren zijn gelijk als ze dezelfde lengte en richting hebben (het aangrijpingspunt speelt geen rol).
- ✓ Een vector met als aangrijpingspunt de oorsprong, is in standaardpositie, anders is deze getransleerd naar het aangrijppunt.
- ✓ De Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ = de verzameling van alle vectoren in n .
($n=2 \rightarrow$ platte vlak, $n=3 \rightarrow$ ruimte)
- ✓ Vectoren optellen: $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}$
- ✓ Vectoren scalair vermenigvuldigen: $c\mathbf{v} = c \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ cv_3 \end{bmatrix}$
- ✓ De getallen in een vector worden kentallen genoemd, het aantal kentallen n van een vector bepaald in welke $\mathbb{R}^n$ (= Euclidische n -ruimte) de vector zich bevindt. Voor $n > 3$ bestaat er geen meetkundige interpretatie.
- ✓ Een vector met alle kentallen nul wordt een nulvector genoemd, genoteerd met $\mathbf{0}$. Uit de context moet duidelijk zijn in welke $\mathbb{R}^n$ dez nulvector ligt, en hoeveel kentallen hij dus heeft.
- ✓ De vectoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ zijn vectoren met op de n^e plek een 1 en verder alleen nullen (het aantal nullen is afhankelijk van de $\mathbb{R}^n$ waarin wordt gewerkt).
- ✓ Een vector met lengte 1 wordt een eenheidsvector genoemd. De vectoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ zijn hier voorbeelden van.
- ✓ Twee vectoren $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ en $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$ zijn gelijk als $n = m$ en $v_i = w_i$ voor $i = 1, 2, \dots, n$.

Lineaire combinaties. Een lineaire combinatie van één of meerdere vectoren (bijv. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$) is een vector $\mathbf{v}$ die als volgt kan worden opgebouwd:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

Hierbij zijn c_1, c_2 en c_3 scalair, deze vormen de gewichten/coëfficiënten van de lineaire combinatie. Aangezien de coëfficiënten ook 0 kunnen zijn, is het ook mogelijk dat een vector een lineaire combinatie is van één andere vector (dus een scalair veelvoud). Daarnaast betekent dit dat de nulvector een lineaire combinatie is van elk mogelijk stel vectoren.

Standaardvragen bij lineaire combinaties:

- Is $\mathbf{v}$ een lineaire combinatie van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$?
- Zo ja, op hoeveel manieren?
- Zo ja, geef er één.

- Bestaat er een vector in $\mathbb{R}^n$ die geen lineaire combinatie is van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$?

Spannen. Een span (ook wel lineair omhulsel) van de vectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ (allemaal uit één bepaalde $\mathbb{R}^n$) bestaat uit alle lineaire combinaties van deze k vectoren. Notatie: $\text{sp}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$.

Eigenschappen van lineaire omhulsels:

- ✓ Een span bevat altijd de nulvector uit de juiste $\mathbb{R}^n$.
- ✓ Een span bevat vectoren uit één bepaalde $\mathbb{R}^n$, dus het is een deelverzameling hiervan.
- ✓ Meestal vult een span niet heel $\mathbb{R}^n$ op, dus meestal bestaat er een vector in $\mathbb{R}^n$, die niet tot het span behoort.
- ✓ Als een span wel alle vectoren uit $\mathbb{R}^n$ bevat, is dit een opspannende verzameling voor $\mathbb{R}^n$, ofwel de vectoren uit het span 'spannen heel $\mathbb{R}^n$ op'.
- ✓ De verzameling $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ is een voorbeeld van een opspannende verzameling voor $\mathbb{R}^n$. Deze is bijzonder, omdat iedere vector uit $\mathbb{R}^n$ maar op één manier als lineaire combinatie van deze vectoren kan worden geschreven. Daarom worden de vectoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ de standaardbasisvectoren van $\mathbb{R}^n$ genoemd.

Standaardvragen bij lineaire omhulsels/spannen:

- Behoort $\mathbf{v}$ tot $\text{sp}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$?
- Is $\text{sp}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \mathbb{R}^n$? (Dus: spannen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ heel $\mathbb{R}^n$ op?)
- Gegeven 2 spannen, bevatten deze dezelfde vectoren of niet? (Dus: zijn ze gelijk of verschillend?)
- Kunnen we een vector uit $\text{sp}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ verwijderen zonder dat het span verandert? (Dus: is één van de vectoren uit het span een lineaire combinatie van de anderen?)

2. LES 1.2 - DE NORM EN HET STANDAARD INWENDIG PRODUCT (PAR. 1.2 UIT BOEK)

Lengte/norm. De lengte/norm $\|\mathbf{v}\|$ van een vector is als volgt te berekenen:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

Rekenregels voor de lengte:

- $\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \|\mathbf{v}\| = 0$
- $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \|\mathbf{v}\| > 0$
- $\|c\mathbf{v}\| = |c| \cdot \|\mathbf{v}\|$
- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (De driehoeksongelijkheid)

Verder kun je iedere vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ normaliseren, ofwel vervangen door de bijbehorende eenheidsvector $\mathbf{u}$. Deze eenheidsvector is de vector $\mathbf{u}$ met dezelfde richting als $\mathbf{v}$ en lengte 1. De eenheidsvector $\mathbf{u}$ die bij een vector $\mathbf{v}$ hoort krijg je door de volgende vergelijking op te lossen:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$$

Afstand. De afstand tussen vectoren kan als volgt worden uitgerekend:

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

(Standaard) inwendig product. Het (standaard) inwendig product, ook wel dot product, is $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$. Let op: $\mathbf{uv}$ is iets anders, dit is niet gedefinieerd!

Rekenregels voor het inwendig product:

- > $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$
- > $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{w} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$
- > Dus $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$
- > $(c\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet (c\mathbf{v})$
- > $\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = 0$
- > $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} > 0$

Deze laatste 2 eigenschappen betekenen dat het inwendig product 'positief definitief' is.

Verder zijn er nog een aantal regels waarin lengtes en inwendig product gecombineerd worden:

- > $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}$ ofwel $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{v}$
- > $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cdot \cos \theta$ (met θ de hoek in $[0, \pi]$ tussen twee vectoren)
- > Deze definitie volgt uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:
 $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$
- > Als 2 vectoren een hoek θ van 90 graden hebben, en dus loodrecht/orthogonaal zijn, is het inwendig product van de 2 vectoren gelijk aan 0.
Dus $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$

3. LES 2.1 - MATRIXALGEBRA (PAR. 1.2 UIT BOEK)

Matrices. Een matrix is een rechthoekig getallenschema, met daarin kentallen/elementen. Een matrix wordt genoteerd met een hoofdletter. Een $m \times n$ matrix (dus met m rijen en n kolommen) ziet er als volgt uit:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Eigenschappen matrices:

- ✓ Matrices worden dus beschreven als $m \times n$ matrix, met m rijen en n kolommen.
- ✓ Het getal in de i^e rij en j^e kolom van een matrix A noteren we als a_{ij} . De hele matrix wordt dan genoteerd als $A = [a_{ij}]$
- ✓ Je kunt een $m \times n$ matrix A beschouwen als vectoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ in $\mathbb{R}^m$. Matrix A kan dus worden geschreven als $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$.
- ✓ Twee matrices zijn gelijk als m en n van beide matrices en alle corresponderende kentallen gelijk zijn.
- ✓ Matrices optellen werkt op dezelfde manier als vectoren optellen, dus als twee matrices dezelfde afmetingen hebben kunnen ze elementsgewijs worden opgeteld (dus $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$).
- ✓ Scalaire vermenigvuldiging werkt bij matrices ook hetzelfde als bij vectoren, dus ieder kental wordt apart met c vermenigvuldigd (dus $cA = [ca_{ij}]$).

Rekenregels matrices:

- > $A + B = B + A$
- > $(A + B) + C = A + (B + C)$

- $A + 0 = A$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $c(dA) = (cd)A$

Speciale matrices. Er zijn een aantal speciale matrices:

- ✓ Kolomvector: Een kolomvector uit $\mathbb{R}^n$ is een $n \times 1$ matrix.
- ✓ Rijvector: Een rijvector met m kentallen is een $1 \times m$ matrix.
- ✓ Nulmatrix O of $O_{m \times n}$: Een matrix waarvan alle kentallen nul zijn.
- ✓ Vierkante matrix: Een $n \times n$ matrix. De kentallen a_{ij} waarvoor $i = j$ worden de diagonaalelementen genoemd (dus de elementen op de (hoofd)diagonaal van linksboven naar rechtsonder).
- ✓ Diagonaalmatrix: Een vierkante matrix waarbij $a_{ij} = 0$ als $i \neq j$ (dus alle kentallen zijn 0, behalve de diagonaalelementen).
- ✓ Eenheidsmatrix I of I_n : Een diagonaalmatrix waarbij alle diagonaalelementen 1 zijn.
- ✓ Bovendriehoeksmatrix: Een vierkante matrix met $a_{ij} = 0$ als $i > j$, dus onder de hoofddiagonaal staan alleen maar nullen.
- ✓ Onderdriehoeksmatrix: Een vierkante matrix met $a_{ij} = 0$ als $i < j$, dus boven de hoofddiagonaal staan alleen maar nullen.
- ✓ Symmetrische matrix: Een vierkante matrix met $a_{ij} = a_{ji}$ voor alle i en j .

Matrixvermenigvuldiging. Twee matrices kunnen met elkaar worden vermenigvuldigd als het aantal kolommen van de eerste matrix (A) gelijk is aan het aantal rijen van de tweede matrix (B). Ieder getal van het product $C = AB$ is dan te maken door voor elke c_{ij} het inwendig product van de i^e rij van A met de j^e kolom van B te berekenen. Als A een $m \times n$ matrix is en B een $n \times p$ matrix, is het product $C = AB$ een $m \times p$ matrix.

Als je een matrix A vermenigvuldigt met een vector, krijg je een lineaire combinatie van de kolommen van A , met de kentallen van $\mathbf{v}$ als gewichten:

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n$$

Andersom is iedere vectorvergelijking dus te schrijven als een matrixvergelijking van de vorm $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Iets dergelijks kunnen we doen met vermenigvuldigingen van twee matrices. We kunnen de matrix-kolom representatie geven van het product, waarbij elke kolom van AB een lineaire combinatie is van de kolommen van A , met als gewichten de kentallen van B :

$$AB = A \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$$

En op weer dezelfde manier kunnen we de rij-matrix representatie geven, waarbij de rijen van AB lineaire combinaties zijn van de rijen van B , met als gewichten de kentallen van A .

Rekenregels matrixvermenigvuldiging:

- $A(BC) = (AB)C$ (associativiteit)
- $A(B + C) = AB + AC$ (linksdistributiviteit)
- $(A + B)C = AC + BC$ (rechtsdistributiviteit)
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

➤ $I_m A = A = A I_n$ als A een $m \times n$ matrix is

De getransponeerde van een matrix. De getransponeerde van een matrix krijg je door de 1^e rij als 1^e kolom te nemen, de 2^e rij als 2^e kolom, enz. Dus $(A^T)_{ij} = A_{ji}$, waarbij A een $m \times n$ matrix is en A^T een $n \times m$ matrix.

Rekenregels getransponeerden:

- Matrix A is symmetrisch $\iff A^T = A$
- $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$
- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = c(A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

4. LES 2.2/3.1 - OPLOSSEN VAN LINEAIRE STELSELS (PAR. 1.4 UIT BOEK)

Lineaire stelsels. Een lineaire vergelijking is een vergelijking van de vorm $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$. Hierbij zijn de getallen a de coëfficiënten (bekend), b de bekende term en de getallen x zijn de onbekenden. De oplossing is te schrijven als een vector: $\mathbf{x} = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$.

Een lineair stelsel is een stelsel met één of meerdere van deze lineaire vergelijkingen. Een vector is een oplossing van zo'n stelsel als deze vector een oplossing is van alle vergelijkingen van het stelsel. Alle oplossingen van een stelsel worden samen de oplossingsverzameling genoemd (ook wel volledige/algemene oplossing).

Twee lineaire stelsels zijn equivalent als ze hetzelfde aantal vergelijkingen, hetzelfde aantal onbekenden en dezelfde oplossingsverzameling hebben.

Oplossen van lineaire stelsels. Elementaire operaties zijn operaties die je altijd mag uitvoeren op lineaire stelsels, zonder dat de oplossingen veranderen (dus als je dit doet is het nieuwe stelsel equivalent met het oude). Dit zijn de elementaire operaties:

- ✓ Twee vergelijkingen omwisselen.
- ✓ Een vergelijking vermenigvuldigen met een getal $\neq 0$.
- ✓ Bij een vergelijking een veelvoud van een andere vergelijking optellen.

Op deze manier kun je een lineair stelsel 'terugvegen' tot een vorm waarin het stelsel makkelijker op te lossen is. Ten eerste kun je het stelsel vegen tot echelonvorm. De eigenschappen van een stelsel in echelonvorm zijn:

- ✓ Elke vergelijking mist minstens één van de eerste onbekenden van de vergelijking ervoor (waardoor er een trapvorm ontstaat).
- ✓ In iedere vergelijking wordt de eerste coëfficiënt ongelijk aan nul de pivot (of spil) van die rij genoemd.
- ✓ Ieder stelsel kan tot echelonvorm worden geveegd.
- ✓ De echelonvorm van een stelsel is niet uniek, bij ieder stelsel bestaan oneindig veel verschillende echelonvormen. De plekken van de pivots zijn wel altijd hetzelfde.
- ✓ Als een stelsel in echelonvorm is geveegd, kun je bepalen hoeveel oplossingen het stelsel heeft:

* Als er een vergelijking ontstaat waarbij alle coëfficiënten nul zijn, terwijl het laatste getal (achter het '='-teken) ongelijk aan nul is, zijn er geen oplossingen (het stelsel is dan inconsistent).

- * Als er niet zo'n vergelijking is, en er zijn vrije variabelen (onbekenden zonder pivot), dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen.
- * Als er geen nulvergelijking is en er ook geen vrije variabelen bestaan (dus iedere onbekende heeft een pivot), heeft het stelsel precies één oplossing.
- ✓ Eventueel kun je de oplossingen ook al zoeken door middel van terugsubstitutie, maar het is handiger om hiervoor door te vegen naar gereduceerde echelonvorm.

Eigenschappen van een stelsel in gereduceerde echelonvorm:

- ✓ Het stelsel is in echelonvorm.
- ✓ Alle pivots zijn gelijk aan 1.
- ✓ Onbekenden met een pivot komen in slechts één vergelijking voor (dus onder en boven de pivots zijn de coëfficiënten nul).
- ✓ De onbekenden zonder pivot zijn vrije variabelen, hierin kun je de andere onbekenden uitdrukken.
- ✓ De gereduceerde echelonvorm van een stelsel is uniek.

Het is overzichtelijker en efficiënter om een lineair stelsel te representeren door een matrix. Dit kan in 2 verschillende vormen:

- ✓ De coëfficiëntenmatrix, met hierin de coëfficiënten van de vergelijkingen van het stelsel (dus de eerste kolom bestaat uit de coëfficiënten van x_1 in iedere vergelijking).
- ✓ De aangevulde matrix, waarin ook de constanten worden toegevoegd, meestal achter een verticale streep (dus $[A \mid \mathbf{b}]$ voor de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$).

5. LES 3.2 - INVERTEERBAARHEID (PAR. 1.5 UIT BOEK)

Definitie. Inverteerbaarheid van matrices is te definiëren door te kijken naar de volgende punten:

- ✓ Een matrix is inverteerbaar als er een matrix C bestaat zodat $AC = I$ en $CA = I$. Hierbij is C de inverse van A .
- ✓ Zo'n matrix C is uniek, dus kunnen we spreken over dé inverse van A , die met A^{-1} wordt genoteerd.
- ✓ Een inverteerbare matrix is altijd vierkant (en zijn inverse dus ook).
- ✓ Een vierkante matrix die niet inverteerbaar is, wordt een singuliere matrix genoemd.
- ✓ Als een matrix (in echelonvorm) in elke rij en kolom een pivot heeft, is deze matrix inverteerbaar (en andersom).

Rekenregels voor inverteerbaarheid:

- A is inverteerbaar $\Rightarrow A^{-1}$ is inverteerbaar
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- A is inverteerbaar $\Rightarrow cA$ is inverteerbaar
- $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$
- A en B zijn inverteerbaar $\Rightarrow AB$ is inverteerbaar
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- A is inverteerbaar $\Rightarrow A^T$ is inverteerbaar
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

De inverse vinden. De inverse van een matrix A kan worden gevonden door de aangevulde matrix $[A \mid I]$ te vegen tot $[I \mid C]$. Als dit niet kan, omdat A niet in iedere rij en kolom een pivot overhoudt, is A niet inverteerbaar. Als dit wel kan is de gevonden matrix C (dus het deel achter de streep) de inverse van A .

6. LES 4.1 - (ON)AFHANKELIJKHEID VAN VECTOREN (PAR. 2.1 UIT BOEK)

Afhankelijkheid en onafhankelijkheid. $\text{sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\} = \text{sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{k-1}\}$ als $\mathbf{w}_k$ een lineaire combinatie is van de vectoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{k-1}$. Dit betekent dus dat $\mathbf{w}_k$ uit de opspannende verzameling verwijderd kan worden zonder dat het span verandert.

Zolang er in een span één of meerdere vectoren zitten die lineaire combinaties zijn van de andere vectoren uit dit span, wordt dit een afhankelijk stel vectoren genoemd, anders is het een onafhankelijk stel. Een span dat uit één vector bestaat, is altijd onafhankelijk, behalve als deze vector de nulvector is.

Voor een onafhankelijk stel vectoren geldt altijd dat de vectorvergelijking $x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \dots + x_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$ precies één oplossing heeft (namelijk $x_i = 0$).

Een stel vectoren is altijd afhankelijk als:

- ✓ Het stel de nulvector bevat.
- ✓ Het stel m vectoren bevat in $\mathbb{R}^n$, met $m > n$.
- ✓ Twee vectoren in het stel veelvoudenvan elkaar zijn.

7. LES 4.2 - BASIS EN DIMENSIE (PAR 2.1 UIT BOEK)

Basis. Een basis voor een lineair omhulsel W is een onafhankelijk stel vectoren dat heel W opspant. Voor elke W bestaan er oneindig veel bases, wel bevatten deze bases allemaal evenveel vectoren. Het stel $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ is de standaardbasis voor $\mathbb{R}^n$.

Het span $\{\mathbf{0}\}$ is afhankelijk, en dus geen basis. Uitdunnen geeft dat de lege verzameling $\{\}$ een basis is voor $\{\mathbf{0}\}$.

Checken of een stel vectoren afhankelijk is kan snel door de aangevulde matrix $[A \mid \mathbf{0}]$ te vegen tot echelonvorm. Als een bepaalde kolom in geveegde vorm geen pivot heeft, is deze kolom een lineaire combinatie van de andere kolommen. De kolom die in de oorspronkelijke matrix op deze plek stond, is dan ook een lineaire combinatie van de andere kolommen uit deze matrix, dus om een basis te maken kan de bijbehorende vector uit het stel worden verwijderd. Uiteindelijk is het aantal vectoren in de basis gelijk aan het aantal pivots in de geveegde matrix.

Dimensie. Zoals eerder gezegd bevatten verschillende bases voor een lineair omhulsel W altijd evenveel vectoren. Dit aantal vectoren in een basis wordt de dimensie van W genoemd. De dimensie van $\mathbb{R}^n$ is bijvoorbeeld n , de dimensie van $\{\mathbf{0}\}$ is 0.

8. LES 5.1 - BASISCONTROLE EN DEELRUIMTEN (PAR 2.1 EN 1.6 UIT BOEK)

Basiscontrole. Een stel vectoren S is een basis voor W in de volgende gevallen:

- ✓ $W = \text{Span } S$ (dus de vectoren uit S spannen heel W op) en S is onafhankelijk

- ✓ S is onafhankelijk, alle vectoren uit S behoren tot W en het aantal vectoren in S is gelijk aan $\dim W$
- ✓ $W = \text{Span } S$ (dus de vectoren uit S spannen heel W op) en het aantal vectoren in S is gelijk aan $\dim W$

Een andere eigenschap van een basis voor W is dat elke vector uit W op precies één manier kan worden geschreven als lineaire combinatie van de vectoren uit deze basis.

Deelruimten. Een deelverzameling W van $\mathbb{R}^n$ is een (lineaire) deelruimte van $\mathbb{R}^n$ als elke mogelijke lineaire combinatie van de vectoren uit de deelverzameling weer in de deelverzameling zit. Elk lineair omhulsel in $\mathbb{R}^n$ is dus een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$, en andersom is een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ altijd een lineair omhulsel van eindig veel vectoren.

Bijzondere deelruimten:

- ✓ $\mathbb{R}^n$ is zelf een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^2$ is geen deelruimte van $\mathbb{R}^3$)
- ✓ $\{\mathbf{0}\}$ is een deelruimte van $\mathbb{R}^n$, deze wordt de nul-deelruimte van $\mathbb{R}^n$ genoemd
- ✓ Nulruimte van A ($\text{Nul } A$): oplossingsverzameling van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dus alle vectoren $\mathbf{x}$ waarvoor geldt $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- ✓ Kolomruimte van A ($\text{Col } A$): het lineair omhulsel van de kolommen van A , dus $\text{Col } A = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ heeft een oplossing}\}$.
- ✓ Rijruimte van A ($\text{Row } A$): het lineair omhulsel van de rijen van A (waarbij de rijen worden getransponeerd naar kolommen). Hiervoor geldt $\text{Row } A = \text{Col } A^T$.
- ✓ Linkernulruimte van $A = \text{Nul } A^T$

Voor een $m \times n$ matrix A zijn $\text{Row } A$ en $\text{Nul } A$ deelruimten van $\mathbb{R}^n$ en $\text{Col } A$ en $\text{Nul } A^T$ zijn deelruimten van $\mathbb{R}^m$.

9. LES 5.2 - VINDEN VAN BASIS EN DIMENSIE VAN DEELRUIMTEN, BESCHRIJVEN VAN DEELRUIMTEN, RANG (PAR 1.6 EN 2.2)

Vinden van basis en dimensie. Een basis van de nulruimte van een matrix is te vinden door het stelsel $A(x) = \mathbf{0}$ op te lossen. De dimensie van deze basis weet je al zodra de pivots bekend zijn, want $\dim(\text{Nul}(A)) = \text{aantal variabelen zonder pivot}$.

Een basis van de kolomruimte van een matrix is te maken met de kolommen die in de echelonvorm van de matrix een pivot hebben. Er geldt dus ook $\dim(\text{Col}(A)) = \text{aantal pivots van } A$.

Om een basis voor de rijruimte te vinden kun je de getransponeerde matrix A^T vegen en hieruit op dezelfde manier als bij de kolomruimte een basis bepalen, aangezien $\text{Row}(A) = \text{Col}(A^T)$. Een andere manier is de matrix A te vegen, hiervoor kun je gebruiken dat voor een matrix A die tot B geveegd kan worden, geldt dat $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$. Hieruit kun je concluderen dat de niet-nulrijen van de echelonmatrix een basis vormen voor de rijruimte.

Rekenregels rang en dimensie:

- $\text{Rank } A = \text{aantal pivots van } A$
- $\dim(\text{Col } A) = \dim(\text{Row } A) = \text{Rank } A$
- $\dim(\text{Nul } A) + \text{Rank } A = \text{aantal kolommen van } A = n$

$$\triangleright \dim(\text{Nul } A) = \text{Nullity}(A)$$

10. LES 6.1/6.2 - LINEAIRE AFBEELDINGEN (PAR 2.3 UIT BOEK)

Lineaire afbeeldingen. Een functie $f : A \rightarrow B$ verbindt elk element a uit A (het domein) aan precies één element b uit B (het codomein). Dit element b wordt dan genoteerd als $f(a)$, dit heet ook wel het beeld van a onder f , met a als origineel. Bij lineaire algebra gebruiken we lineaire afbeeldingen. Dit zijn functies $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die aan de volgende voorwaarden voldoen:

- ✓ $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
- ✓ $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ voor elke $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ uit $\mathbb{R}^n$
- ✓ $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$ voor elke $\mathbf{v}$ uit $\mathbb{R}^n$ en c uit $\mathbb{R}$

Een hele makkelijke manier om aan te tonen dat een afbeelding niet lineair is, is dus door aan te tonen dat $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ (stelling van Judith).

Voorbeelden van lineaire afbeeldingen zijn:

- ✓ De nulafbeelding: $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, N(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
- ✓ De identieke afbeelding: $Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, Id(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
- ✓ Matrixtransformatie: $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$
- ✓ Spiegelingen in lijnen door de oorsprong (van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$)
- ✓ Rotaties om de oorsprong (van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$)
- ✓ Projecties op lijnen door de oorsprong (van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$)

Matrixrepresentatie van lineaire afbeeldingen. Elke lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is te behandelen als een matrixtransformatie. Er bestaat voor iedere lineaire afbeelding namelijk precies één $m \times n$ matrix A waarvoor $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. De kolommen van A zijn de beelden van de standaardbasisvectoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Dus:

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad \dots \quad T(\mathbf{e}_n)]$$

Deze matrix A wordt de standaardmatrix van de afbeelding genoemd.

Samenstellingen. Als $T_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $T_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ lineaire afbeeldingen zijn, dan is de compositie $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ook lineair. Voor deze samenstelling geldt dan $T(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$, waarbij $C = A_2A_1$, dus de standaardmatrix van de compositie is gelijk aan het matrixproduct van de standaardmatrices van de losse afbeeldingen.

Inverteerbaarheid. Een afbeelding $f : A \rightarrow B$ is inverteerbaar als er een afbeelding $g : B \rightarrow A$ bestaat zodat:

$$\begin{aligned} f \circ g &= Id_B \text{ (de identieke afbeelding op } B) \\ g \circ f &= Id_A \text{ (de identieke afbeelding op } A) \end{aligned}$$

Hierbij is g de inverse van f (g is dus uniek). Daarnaast is f ook de inverse van g . Voor een lineaire afbeelding T met standaardmatrix A geldt dan:

- ✓ Als T inverteerbaar is, dan is T^{-1} ook lineair
- ✓ T inverteerbaar $\iff A$ inverteerbaar
- ✓ De standaardmatrix van T^{-1} is A^{-1}
- ✓ T is inverteerbaar als hij bijtief is

Kern en beeld. De kern van een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bestaat uit de vectoren die door T op $\mathbf{0}$ worden afgebeeld, dus: $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$. Het bereik of beeld van T is de verzameling van alle beelden onder T , dus: $\text{Im}(T) = T[\mathbb{R}^n] = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m \mid \text{er is een } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ met } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$. Voor een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ met als standaardmatrix A , geldt:

- $\text{Ker}(T) = \text{Nul } A$
- $\text{Im}(T) = \text{Col } A$
- $\dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T) = n = \dim(\text{Domein van } T)$

11. LES 7.1 - OPPERVLAKTE, VOLUME EN UITWENDIG PRODUCT (PAR. 4.1 UIT BOEK)

Determinant. De determinant van de matrix $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ is:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

De absolute waarde hiervan is de oppervlakte van een parallellogram dat wordt bepaald door de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^2$.

Uitwendig product. Het uitwendig product van $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ is de

vector $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$. Het uitwendig product bestaat alleen in $\mathbb{R}^3$!

Eigenschappen van het uitwendig product:

- ✓ $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ staat loodrecht op zowel $\mathbf{b}$ als $\mathbf{c}$
- ✓ De lengte $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$ is gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram (in $\mathbb{R}^3$) dat wordt bepaald door $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$.
- ✓ Rechterhandregel: De richting van $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ is de richting van de duim van je rechterhand als je vingers buigen van $\mathbf{b}$ naar $\mathbf{c}$.

Rekenregels voor het uitwendig product:

- $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
- $\mathbf{a} \times (r\mathbf{b}) = r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
- $\mathbf{b} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ en $\mathbf{c} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ en $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ zijn niet per definitie hetzelfde

Het volume van een parallellepipedum dat bepaald wordt door $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ is als volgt te berekenen: volume parallellepipedum = $|\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$.

Het getal $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ is de determinant van de matrix $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$.

$$\text{Dus } \det A = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

12. LES 7.2 - DETERMINANTEN (PAR. 4.2 EN 4.3 UIT BOEK)

Determinanten. Een belangrijke eigenschap van determinanten:

A is inverteerbaar $\iff \det A \neq 0$.

De (i, j) minor van $A = A_{ij}$ = de $(n-1) \times (n-1)$ matrix die ontstaat door de

i^e rij en j^e kolom van A te schrappen (hiervoor moet A een $n \times n$ matrix zijn met $n \geq 2$).

De determinant van een matrix A kan berekend worden door te ontwikkelen naar een rij/kolom naar keuze. Dit gaat als volgt:

Ontwikkelen naar i^e rij: $\det A = \pm a_{i1} \det A_{i1} \pm a_{i2} \det A_{i2} \pm \dots \pm a_{in} \det A_{in}$.

Ontwikkelen naar j^e kolom: $\det A = \pm a_{1j} \det A_{1j} \pm a_{2j} \det A_{2j} \pm \dots \pm a_{nj} \det A_{nj}$.

Bepalen of er + of - moet worden gebruikt kan met behulp van $\text{cof} A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, maar er kan ook gebruik worden gemaakt van het schaakbordsysteem, waarbij links-boven een + staat.

Het berekenen van de determinant kan sneller, door gebruik te maken van de volgende regels:

- ✓ Als B uit A ontstaat door een veelvoud van een rij/kolom van A bij een andere rij/kolom van A op te tellen, dan $\det B = \det A$.
- ✓ Als B ontstaat door twee rijen van A te verwisselen, dan $\det B = -\det A$.
- ✓ Als B uit A ontstaat door een rij van A met c te vermenigvuldigen, dan $\det B = c \det A$ (of $\det A = \frac{1}{c} \det B$).

Verder is het handig om alleen te ontwikkelen naar een rij of kolom als hierin veel nullen staan.

Rekenregels voor determinanten:

- $\det A^T = \det A$
- $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$
- A is inverteerbaar $\iff \det A \neq 0$
- Als A^{-1} bestaat, dan $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
- $\det(cA) = c^n \det(A)$

13. LES 8.1 - EIGENWAARDEN EN EIGENVECTOREN (PAR. 5.1 EN 5.2 UIT BOEK)

Eigenwaarden en eigenvectoren. Een vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ heet een eigenvector van de vierkante matrix A als er een waarde van λ bestaat waarvoor $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. De waarden van λ waarvoor dit geldt, zijn eigenwaarden van A . Eigenwaarden kunnen (in tegenstelling tot eigenvectoren) 0 zijn.

Belangrijke stellingen bij eigenwaarden en eigenvectoren:

- ✓ De (oneindig vele) eigenvectoren bij eigenwaarde λ zijn alle niet-nul oplossingen van $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- ✓ Eigenwaarden kunnen niet-reëel zijn en eigenvectoren kunnen niet-reële kentallen hebben, ook al is de matrix reëel.
- ✓ Als $\mathbf{v}$ een eigenvector is bij eigenwaarde λ , dan geldt $A^k \mathbf{v} = \lambda^k \mathbf{v}$.
- ✓ Eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden zijn onafhankelijk.
- ✓ Alle lineaire combinaties van de eigenvectoren bij één eigenwaarde zijn ook eigenvectoren bij die eigenwaarde (behalve de nulvector).
- ✓ Een matrix in $\mathbb{R}^n$ heeft hierdoor maximaal n eigenwaarden.

Eigenruimten. E_λ = de eigenruimte van A bij de eigenwaarde λ . Dit zijn alle oplossingen van de vergelijking $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, ofwel $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De eigenruimte bestaat dus eigenlijk uit alle eigenvectoren bij eigenwaarde λ , plus de nulvector.

Vinden van eigenwaarden. De eigenwaarden van een $n \times n$ matrix A zijn alle n oplossingen van $\det(A - \lambda I) = 0$. Deze vergelijking wordt de karakteristieke vergelijking van A genoemd. Oplossen van deze vergelijking geeft een n^e -graads polynoom, dit is het karakteristieke polynoom van A .

Het kan zo zijn dat uit dit polynoom meerdere keren dezelfde oplossing komt (multipliciteiten) of dat er een complexe oplossing uitkomt. Zowel de multipliciteiten als de complexe oplossingen moeten worden meegeteld om op n eigenwaarden uit te komen.

Drie dingen die altijd moeten gelden voor de oplossingen van het karakteristiek polynoom (dus voor de eigenwaarden):

- ✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} =$ som van de getallen op de diagonaal van A
- ✓ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A =$ constante uit het karakteristiek polynoom (dus het laatste getal, waarachter geen λ staat)
- ✓ Als een eigenwaarde van een reële matrix A het getal $\lambda = a + bi$ is, is de geconjugeerde $a - bi$ ook een eigenwaarde. De bijbehorende eigenvectoren zijn ook complex.

Multipliciteiten. Algebraïsche multipliciteit van een eigenwaarde $\lambda = \text{am}(\lambda) =$ multipliciteit van λ als oplossing van de karakteristieke vergelijking (dus hoe vaak λ een oplossing is).

Meetkundige multipliciteit van een eigenwaarde $\lambda = \text{mm}(\lambda) =$ dimensie van de eigenruimte E_λ .

Voor deze 2 soorten multipliciteiten geldt: $1 \leq \text{mm}(\lambda) \leq \text{am}(\lambda)$.

14. LES 8.2 - BEREKENEN VAN $A^k \mathbf{v}$ (PAR. 5.2 EN 5.3 UIT BOEK)

Eigenbasis. Een eigenbasis bij A = een basis voor $\mathbb{R}^n$ die volledig uit eigenvectoren van A bestaat. Om te checken of een eigenbasis bestaat, neem je de vereniging van de bases van de eigenruimten van alle eigenwaarden bij A . Als deze vereniging slechts reële vectoren bevat, is deze vereniging een onafhankelijke verzameling van eigenvectoren van A . Als er precies n vectoren in de verzameling zitten, is deze verzameling dus een eigenbasis.

In het kort kun je zeggen: Een eigenbasis voor $\mathbb{R}^n$ bestaat als en slechts als alle eigenwaarden reëel zijn én voor elke eigenwaarde λ geldt dat $\text{am}(\lambda) = \text{mm}(\lambda)$. Als er niet-reële eigenwaarden bestaan, weet je dus al dat er geen eigenbasis bestaat. Als er n verschillende reële eigenwaarden zijn, weet je juist meteen dat er een eigenbasis bestaat. Als dit allebei niet het geval is, is het handig om de dimensies van de eigenruimten te bepalen, aangezien deze gelijk zijn aan de meetkundige multipliciteiten. De algebraïsche multipliciteiten weet je zodra je de eigenwaarden hebt bepaald.

Als er een eigenbasis bestaat bij de matrix A , dan is iedere vector $\mathbf{v}$ te maken als lineaire combinatie van de vectoren uit deze eigenbasis, ofwel er bestaan c_1 t/m c_n zo, dat $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$, waarbij de vectoren $\mathbf{b}_i$ eigenvectoren van A zijn. Hierdoor is $A^k \mathbf{v}$ voor elke $\mathbf{v}$ als volgt te berekenen: $A^k \mathbf{v} = c_1 \lambda_1^k \mathbf{b}_1 + \dots + c_n \lambda_n^k \mathbf{b}_n$.

15. LES 9.1 - DIAGONALISEERBAARHEID (PAR. 5.2 UIT BOEK)

Diagonaliseerbaarheid. Als er een eigenbasis bestaat voor de matrix A , kan A worden geschreven als $A = PDP^{-1}$, waarbij D een diagonaalmatrix is en P een inverteerbare matrix. Deze schrijfwijze van A wordt een decompositie/ontbinding van A genoemd.

Als er zo'n decompositie van A bestaat, is de matrix A diagonaliseerbaar (dit is dus

zo als A n onafhankelijke eigenvectoren heeft, dus als voor elke eigenwaarde λ geldt dat $\text{am}(\lambda) = \text{mm}(\lambda)$). Als zowel A als P en D reëel zijn, is A reëel diagonaliseerbaar. Alle n (onafhankelijke) eigenvectoren zijn dan dus reëel.

Als een matrix niet diagonaliseerbaar is, wordt deze matrix defect genoemd.

Decompositie vinden. Voor de decompositie $A = PDP^{-1}$ van een matrix A geldt (zowel voor complexe als voor reële gevallen):

- ✓ De kolommen van P vormen een eigenbasis
- ✓ Het kental d_{ii} op de diagonaal van D is de eigenwaarde van A , die hoort bij de eigenvector in de i^e kolom van P .

De matrices P en D zijn dus niet uniek.

Als A diagonaliseerbaar is, en er dus een P en D bestaan waarvoor $A = PDP^{-1}$, dan geldt $A^k = PD^kP^{-1}$. Op deze manier is A^k makkelijk te berekenen, aangezien de kentallen op de diagonaal van D gewoon tot de macht k moeten worden gedaan om D^k te krijgen.

Symmetrische matrix. Iedere reële symmetrische matrix is reëel diagonaliseerbaar. Bij iedere symmetrische $n \times n$ matrix bestaat er dus een eigenbasis voor $\mathbb{R}^n$, ofwel de matrix heeft n eigenwaarden, waarbij voor iedere eigenwaarde geldt dat $\text{am}(\lambda) = \text{mm}(\lambda)$.

Gelijkvormige matrices. Twee vierkante matrices A en B zijn gelijkvormig als er een inverteerbare matrix P bestaat zodat $A = PBP^{-1}$ (ofwel $B = P^{-1}AP$). Gelijkvormige matrices hebben hetzelfde karakteristiek polynoom en dus dezelfde eigenwaarden.

16. LES 9.2 - ORTHOGONALE PROJECTIES (PAR. 6.1 UIT BOEK)

Orthogonale projectie. Stel $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ en $W \subseteq \mathbb{R}^n$. De vector $\mathbf{b}_W$ is een orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op W als:

- ✓ $\mathbf{b}_W$ in W ligt
- ✓ $\mathbf{b} - \mathbf{b}_W$ loodrecht op W staat, dat wil zeggen dat $\mathbf{b} - \mathbf{b}_W$ loodrecht staat op elke vector uit W

Als W het span van één vector is, en die vector is niet de nulvector, spreken we van de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op (de lijn door $\mathbf{0}$ en) $\mathbf{v}$. In deze situatie is de orthogonale projectie gemakkelijk te berekenen: $\mathbf{b}_W = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$.

Orthogonale complement. Het orthogonale complement $W^\perp$ is de verzameling van alle vectoren uit $\mathbb{R}^n$ die loodrecht op W staan. Als $W \subseteq \mathbb{R}^n$, dan geldt ook dat $W^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$.

Voor een deelruimte $W = \text{sp}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ van $\mathbb{R}^n$ geldt:

- ✓ $W^\perp$ is de nulruimte van de matrix die $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ als rijen heeft (dus als $W = \text{Row } A$, dan $W^\perp = \text{Nul } A$, ofwel $(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul } A$)
- ✓ $\dim W + \dim W^\perp = n$
- ✓ $(W^\perp)^\perp = W$
- ✓ De enige vector die zowel in W als in $W^\perp$ ligt, is de nulvector

Ontbinden in loodrechte componenten. Voor iedere vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ en deelruimte W van $\mathbb{R}^n$ bestaat er een unieke orthogonale projectie $\mathbf{b}_W$. Dit wil zeggen dat $\mathbf{b}$ te ontbinden is als $\mathbf{b} = \mathbf{b}_W + \mathbf{b}_{W^\perp}$ met $\mathbf{b} \in W$ en $\mathbf{b}_{W^\perp} \in W^\perp$. Hierbij is $\mathbf{b}_{W^\perp} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_W$. De vector $\mathbf{b}_W$ wordt de component van $\mathbf{b}$ langs W genoemd en $\mathbf{b}_{W^\perp}$ de component van $\mathbf{b}$ loodrecht op W .

Voor de afstand van $\mathbf{b}$ tot W wordt altijd de kortst mogelijke afstand gebruikt, dit is $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_W\|$. Dus voor elke $\mathbf{w} \in W$ met $\mathbf{w} \neq \mathbf{b}_W$ geldt $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_W\| < \|\mathbf{b} - \mathbf{w}\|$.

17. LES 10.1 - ORTHOGONALE VERZAMELINGEN EN GRAM-SCHMIDT (PAR. 6.2 UIT BOEK)

Orthogonale verzameling = verzameling in $\mathbb{R}^n$ waarin alle vectoren loodrecht op elkaar staan.

Orthonormale verzameling = orthogonale verzameling waarbij alle vectoren lengte 1 hebben.

Als de nulvector niet in een orthogonale verzameling $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ zit, is deze verzameling onafhankelijk. Voor elke vector $\mathbf{y} \in \text{Span } S$ geldt dan:

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \dots + \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{v}_p}{\mathbf{v}_p \bullet \mathbf{v}_p} \mathbf{v}_p$$

Orthogonale basis. Als een orthogonale/orthonormale verzameling $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ een basis voor W vormt, is dit een orthogonale/orthonormale basis voor W . Hiermee is voor iedere $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gemakkelijk de orthogonale projectie op W te berekenen:

$$\mathbf{b}_W = \frac{\mathbf{b} \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \dots + \frac{\mathbf{b} \bullet \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k \bullet \mathbf{v}_k} \mathbf{v}_k$$

Zo'n orthogonale basis bestaat voor elke deelruimte $W \neq \{\mathbf{0}\}$ van $\mathbb{R}^n$, maar om deze te vinden moet een heel proces worden doorlopen, namelijk het Gram-Schmidt orthogonaliseringsproces. Hiervoor moet begonnen worden met een willekeurige basis $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$ voor W , er geldt dan:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{b}_2 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_p &= \mathbf{b}_p - \frac{\mathbf{b}_p \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{b}_p \bullet \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\mathbf{b}_p \bullet \mathbf{v}_{p-1}}{\mathbf{v}_{p-1} \bullet \mathbf{v}_{p-1}} \mathbf{v}_{p-1} \end{aligned}$$

De vectoren $\mathbf{v}_1$ t/m $\mathbf{v}_p$ vormen nu een orthogonale basis voor W , als je ze allemaal normaliseert komt er een orthonormale basis voor W uit.

Als er uit dit proces een nulvector komt voor een vector $\mathbf{v}_i$, dan was de bijbehorende vector $\mathbf{b}_i$ een lineaire combinatie van de andere vectoren uit de basis, dus moet deze weg worden gelaten.

18. LES 10.2 - ORTHOGONALE MATRICES (PAR. 6.3 UIT BOEK)

De matrix $A^T A$. Voor iedere matrix A geldt: $A^T A =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{a}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_k \bullet \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_k \bullet \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \bullet \mathbf{a}_k \end{bmatrix}.$$

Hiervoor geldt:

- ✓ $A^T A$ is een diagonaalmatrix $\iff A$ heeft orthogonale kolommen
- ✓ $A^T A = I \iff A$ heeft orthonormale kolommen

Let op: $A^T A = I$ betekent niet per se dat A inverteerbaar is, A hoeft namelijk niet vierkant te zijn.

Als $A^T A = I$ en A is vierkant, dan wordt A een orthogonale matrix genoemd (heeft dus orthonormale kolommen!). In dit geval is A inverteerbaar, en voor de inverse geldt $A^{-1} = A^T$.

Orthogonale matrices. Voor een vierkante matrix A geldt:

- A is een orthogonale matrix (dus $A^T A = I$)
- $\iff A$ is inverteerbaar en $A^{-1} = A^T$
- $\iff$ De kolommen van A zijn orthonormaal (en vormen een orthonormale basis voor $\mathbb{R}^n$)
- $\iff A^T$ is een orthogonale matrix
- $\iff$ De rijen van A zijn orthonormaal (en vormen een orthonormale basis voor $\mathbb{R}^n$)

Rekenregels met een orthogonale matrix A en vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$:

- $A\mathbf{x} \bullet A\mathbf{y} = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$
- $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$
- De hoek tussen $A\mathbf{x}$ en $A\mathbf{y}$ is gelijk aan de hoek tussen $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$

19. LES 11.1 - QR-ONTBINDING EN ORTHOGONALE DIAGONALISEERBAARHEID (PAR. 6.2 EN 6.3 UIT BOEK)

QR-ontbinding. Een $n \times k$ matrix A met onafhankelijke kolommen kan ontbonden worden in de vorm $A = QR$.

De matrix Q is ook een $n \times k$ matrix, de kolommen hiervan zijn orthonormaal. Ze worden gevonden door Gram-Schmidt toe te passen op A en de resultaten te normaliseren.

R is een $k \times k$ bovendriehoeksmatrix die wordt gevonden met behulp van $R = Q^T A$.

Orthogonale diagonaliseerbaarheid. Elke symmetrische matrix is orthogonaal diagonaliseerbaar, ofwel er bestaan een diagonaalmatrix D en een orthogonale matrix Q zo dat $A = QDQ^{-1} = QDQ^T$. Er geldt dus:

A is orthogonaal diagonaliseerbaar $\iff A$ is symmetrisch.

Hieruit volgt dat eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden van een symmetrische matrix niet alleen onafhankelijk, maar ook orthogonaal zijn.

20. LES 11.2 - DE KLEINSTE KWADRATEN METHODE EN PROJECTIEMATRICES (PAR. 6.4 EN 6.5 UIT BOEK)

Kleinste kwadraten. Als een stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geen oplossingen heeft door meetfouten in A en $\mathbf{b}$, kun je een kleinste kwadraten oplossing $\hat{\mathbf{x}}$ zoeken. Dit is de vector

waarvoor $A\hat{\mathbf{x}}$ zo dicht mogelijk bij $\mathbf{b}$ ligt. Dit is het geval wanneer $A\hat{\mathbf{x}}$ de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op $\text{Col}(A)$ is, dus moet gelden $A\hat{\mathbf{x}} \in \text{Col } A$ en $\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}} \in \text{Col } A^\perp$. (Andersom kun je dus met $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_{\text{Col}(A)}$ een orthogonale projectie berekenen als je een kleinste kwadraten oplossing hebt). Een stelsel heeft altijd minstens één kleinste kwadraten oplossing, maar dit kunnen er ook oneindig veel zijn.

Hieruit volgt dat de kleinste kwadraten oplossing(en) precies de oplossing(en) is/zijn van het stelsel $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$. De lineaire vergelijkingen van dit stelsel worden de normale vergelijkingen van het stelsel genoemd.

De afstand van $A\hat{\mathbf{x}}$ tot $\mathbf{b}$ is zo klein mogelijk, dus geldt er $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. De afstand tussen $A\hat{\mathbf{x}}$ en $\mathbf{b}$ (dus $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|$) wordt de kleinste kwadraten fout genoemd.

Als er A onafhankelijke kolommen heeft, bestaat er een QR-ontbinding van A . De kleinste kwadratenoplossing kan dan gevonden worden door de vergelijking $R\mathbf{x} = Q^T \mathbf{b}$ op te lossen, en dit is makkelijk, doordat R een bovendriehoeksmatrix is.

Eén oplossing. Er geldt altijd:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} &\text{ heeft één kleinste kwadraten oplossing} \\ \iff A^T A &\text{ is inverteerbaar} \\ \iff A &\text{ heeft onafhankelijke kolommen} \end{aligned}$$

De kleinste kwadraten oplossing is in dit geval te vinden met de formule $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$ en de projectie van $\mathbf{b}$ op $\text{Col } A$ is dan $\mathbf{b}_{\text{Col}(A)} = A\hat{\mathbf{x}} = A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$.

Projectiematrices. Als je meerdere orthogonale projecties op dezelfde deelruimte W wilt berekenen, kun je een basis voor W zoeken, en de vectoren hieruit in de kolommen van een matrix A zetten. Vervolgens kun je de matrix $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ gebruiken. Er geldt namelijk voor alle vectoren $\mathbf{b}$ dat $\mathbf{b}_W = P\mathbf{b}$. De matrix P is dan de standaardmatrix van orthogonale projectie op $W = \text{Col}(A)$. Zo'n matrix P wordt een projectiematrix genoemd. Een projectiematrix is altijd symmetrisch en idempotent (dus $P^2 = P$).

Andersom geldt dat als P een symmetrische idempotente matrix is, dat dit dan ook een projectiematrix voor $\text{Col } P$ is.

Als er een orthonormale basis wordt gebruikt voor W , geldt $A^T A = I$, dus is P dan erg gemakkelijk te berekenen: $P = AA^T$.

21. LES 12.1 - VECTORRUIMTEN (PAR. 3.1 UIT BOEK)

Eisen vectorruimte. De elementen van een verzameling V mogen vectoren genoemd worden, als de verzameling niet leeg is en lineaire combinaties van de elementen ook weer in de verzameling zitten (dus V moet gesloten zijn onder optelling en onder scalaire vermenigvuldiging). Verder moeten de elementen uit de verzameling voldoen aan de volgende rekeneisen voor vectorruimten:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- Er is een element $\mathbf{e}$ in V met de eigenschap dat $\mathbf{e} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ voor alle $\mathbf{v} \in V$ (de nulvector ofwel $\mathbf{0}$)
- Bij ieder element $\mathbf{v} \in V$ bestaat een element $\mathbf{w}$ in V zo dat $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{e}$ (de tegengestelde van $\mathbf{v}$ ofwel $-\mathbf{v}$)
- $c(d\mathbf{v}) = (cd)\mathbf{v}$

- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
- $(c + d)\mathbf{v} = c\mathbf{v} + d\mathbf{v}$
- $c(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = c\mathbf{v} + c\mathbf{w}$

Voorbeelden van reële vectorruimten:

- ✓ De pijltjes in het platte vlak of de ruimte
- ✓ De verzameling $\mathbb{R}^n$ van kolommen met n reële kentallen
- ✓ De verzameling $M_{m,n}(\mathbb{R})$ van alle reële $m \times n$ matrices
- ✓ De verzameling $P(\mathbb{R})$ van polynomen
- ✓ De verzameling $\mathbb{R}^\infty$ van alle oneindige reële rijtjes
- ✓ De verzameling $F(D, \mathbb{R})$ van alle functies van een vast domein D naar $\mathbb{R}$
- ✓ De verzameling $P_\infty(\mathbb{R})$ van formele machtreeksen met reële coëfficiënten (formeel omdat we ons niet om convergentie bekommeren)

Natuurlijk bestaan vergelijkbare vectorruimten ook in $\mathbb{C}$.

Rekenregels voor vectorruimten V over $\mathbb{L}$ (dus over $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$):

- De nulvector is uniek
- Elke vector heeft precies één tegengestelde
- Voor elke vector $\mathbf{v}$ uit V geldt $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$
- Voor elk drietal vectoren $\mathbf{v}, \mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ uit V geldt: uit $\mathbf{v} + \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{y}$ volgt $\mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$
- $c\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies c = 0$ of $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Sommige vectorruimten kunnen oneindig groot zijn, waardoor ze opgespannen worden door een oneindig aantal vectoren. Er kunnen echter niet oneindig veel vectoren worden opgeteld, dus er bestaan geen oneindige lineaire combinaties. De uitduntingsstelling is dus ook vaak niet nuttig voor oneindig grote spannen, omdat er altijd weer vectoren kunnen worden verwijderd uit het span, zonder dat het span onafhankelijk wordt.

22. LES 12.2 - DEELRUIMTEN (PAR. 3.2 UIT BOEK)

Deelruimte. Een deelverzameling W van een vectorruimte V over $\mathbb{L}$ is een deelruimte van V als W zelf ook een vectorruimte is, dus als:

- W de nulvector van V bevat
- W gesloten is onder optelling
- W gesloten is onder scalaire vermenigvuldiging

De acht rekeneisen hoeven niet meer nagegaan te worden, die gelden namelijk altijd voor deelverzamelingen van vectorruimten.

Elke span van vectoren uit V is een deelruimte van V , en andersom is elke deelruimte van V een span van vectoren uit V . Iedere vectorruimte V bevat dus in ieder geval de deelruimten $\{\mathbf{0}\}$ (de nulvectorruimte) en V zelf.

23. LES 13.1 - BASIS EN DIMENSIE (PAR. 3.2 EN 3.3 UIT BOEK)

Afhankelijkheid. Een oneindig groot span is afhankelijk als tenminste één van de vectoren uit het span een lineaire combinatie is van eindig veel andere vectoren uit S . S is dus onafhankelijk als elk eindig stel vectoren uit S onafhankelijk is.

Een oneindige verzameling vectoren B is dus nog steeds een basis voor een vectorruimte V als $V = \text{sp}(B)$ en B onafhankelijk is, alleen is het nu lastiger te bepalen wanneer dit het geval is. Als B niet leeg is, zijn er zelfs altijd oneindig veel bases te vinden.

Er is wel aangetoond dat oneindig grote vectorruimten altijd een basis hebben, maar deze zijn meestal niet te vinden/op te schrijven.

Dimensie. Een vectorruimte V die eindig voortgebracht is, wordt ook wel eindig-dimensionaal genoemd. Een oneindig grote vectorruimte is oneindig-dimensionaal. Een paar voorbeelden van dimensies:

- ✓ De dimensie van $\{\mathbf{0}\}$ is 0
- ✓ De dimensie van $\mathbb{L}^n$ als vectorruimte over $\mathbb{L}$ is n
- ✓ De dimensie van $\mathbb{C}^n$ als vectorruimte over $\mathbb{R}$ is $2n$
- ✓ De dimensie van $P_n(\mathbb{L})$ is $n + 1$
- ✓ De dimensie van $M_{m \times n}(\mathbb{L})$ als vectorruimte over $\mathbb{L}$ is mn
- ✓ Voor een $m \times n$ matrix A met r pivots geldt $\dim \text{Col}(A) = \dim \text{Row}(A) = r$ en $\dim \text{Nul}(A) = n - r$ (hierin is r de rang van A)

Coördinatisering. Als $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ een basis is voor V , bestaat er voor iedere $\mathbf{v} \in V$ een uniek stel getallen c zodat $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$. Deze getallen c worden de coördinaten van $\mathbf{v}$ ten opzichte van de basis B genoemd, ze worden weergegeven in een kolomvector: $[\mathbf{v}]_B = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$. Deze vector $[\mathbf{v}]_B$ heet de coördinatisering van $\mathbf{v}$ ten opzichte van basis B .

Dit kan eigenlijk worden gedefinieerd als een afbeelding van V naar $\mathbb{L}^n$: een coördinaatafbeelding. Deze afbeelding is bijectief en lineair.

24. LES 13.2 - LINEAIRE AFBEELDINGEN (PAR. 3.4 UIT BOEK)

Isomorfie. Twee vectorruimten U en V zijn isomorf als er een inverteerbare lineaire afbeelding $T : U \rightarrow V$ bestaat. Zo'n afbeelding heet dan een isomorfisme. Een voorbeeld van een isomorfisme is een coördinaatafbeelding.

Isomorfe vectorruimten hebben dezelfde structuur, dus eigenschappen die in de ene ruimte gelden, gelden in de andere ook.

Kern en beeld. Voor een lineaire afbeelding $T : U \rightarrow V$ geldt:

- ✓ De kern bestaat uit de vectoren $\mathbf{u} \in U$ waarvoor $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, dus:
 $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{u} \in U \mid T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}.$
- ✓ Het beeld bestaat uit alle beelden onder T , dus:
 $\text{Im}(T) = T[U] = \{T(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in U\} = \{\mathbf{v} \in V \mid \text{er is een } \mathbf{u} \in U \text{ met } T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\}$
- ✓ $\text{Ker}(T)$ is een deelruimte van U
- ✓ $\text{Im}(T)$ is een deelruimte van V
- ✓ Als U eindig dimensionaal is, dan geldt:
 $\dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim U.$

25. LES 14.1/14.2 - BASISTRANSFORMATIES (PAR. 7.1 EN 7.2 UIT BOEK)

Matrixrepresentaties. Bij iedere lineaire afbeelding $T : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^m$ bestaat er een $m \times n$ matrix A zodat $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. De matrix A bestaat uit de beelden van de standaardbasisvectoren $\mathbf{e}_1$ t/m $\mathbf{e}_n$: $A = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ \cdots \ T(\mathbf{e}_n)]$.

Elke lineaire afbeelding is dus eigenlijk een matrixtransformatie, en de matrix die erbij hoort wordt de standaardmatrix van de afbeelding T genoemd.

Voor lineaire afbeeldingen $T : U \rightarrow V$ (met U eindig dimensionaal), waarbij $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ een basis is voor U en $C = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ een basis voor V , kan de standaardmatrix als volgt worden berekend:

$$A = [[T(\mathbf{u}_1)]_C \ [T(\mathbf{u}_2)]_C \ \cdots \ [T(\mathbf{u}_n)]_C] = [T]_{C \leftarrow B}$$

Er geldt dan voor elke $\mathbf{u} \in U$:

$$[T(\mathbf{u})]_C = A[\mathbf{u}]_B$$