Formuleblad

Inleiding kansrekening - Collegejaar 2014-2015

Boek: Probability, an introduction

Ω = verzameling alle mogelijke uitkomsten, $\mathbb{F}$ verzameling van alle deelverzamelingen (Def 1.1)

$\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{F} \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1 \qquad \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (Def 1.13)

$\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ (Def 1.31) $\qquad \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ $(Ex\ 1.35)$

Onafhankelijk $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ (Def 1.38)

$\mathbb{P}(B_j|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A|B_j)P(B_j)}{\sum_i \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)} = \dfrac{\mathbb{P}(A|B_j)P(B_j)}{\mathbb{P}(A)}$ (Partitiest. 1.48, St. van Bayes 1.50)

Kansmassafunctie $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ (Def 2.3) (met $q = 1 - p$)

Bernoulliverdeling:	$X \sim Bern(p)$	$\mathbb{P}(X = 0) = q$ en $\mathbb{P}(X = 1) = p$.	(Vb. 2.13)
Binomiale verdeling:	$X \sim Bin(n, k)$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	(Vb. 2.13)
Poissonverdeling:	$X \sim Poisson(\lambda)$ $(\lambda > 0)$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$	(Vb. 2.15)
Geometrische verdeling:	$X \sim Geo(p)$	$\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$	(Vb. 2.16)
Neg. binomiale verdeling:	$X \sim NBin(n, p)$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$	(Vb. 2.17)

$Y(x) = g(X(x))$ (St. 2.25)		$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x)$	(Def 2.28)
$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x)\mathbb{P}(X = x)$	(St 2.29)	$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$	(St. 2.30, 6.63)
$Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$	(Def 2.32)	$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$	(Vb. 2.35,4.22,5.62)
$Var(aX + b) = a^2 var(X) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$	(Ex. 2.38,7.17)	$Var(X + Y) = var(X) + 2Cov(X, Y) + var(Y)$	(7.22)
$cov(XY) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$	(Vgl. 7.21),	$\rho(X, Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}$	(correlatiecoëfficiënt , Def 7.25)
$\mathbb{E}(X|B) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x|B)$	(Def 2.40)	$\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{E}(X|B_i)\mathbb{P}(B_i)$	(Partitiestelling 2.42)

Samengestelde massafunctie $p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$	(Def 3.1)
$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_x \sum_y g(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	(St. 3.10)
Onafhankelijk $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$	(Def 3.13)
Onafhankelijk $\Leftrightarrow$ $p_{X,Y}(x, y) = f(x)g(y)$	(St. 3.16)
Onafhankelijk $\Longrightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$	(St. 3.19, Vgl. 6.64)
Onafhankelijk $\Leftrightarrow \mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))$	(St. 3.20, 6.66)
Onafhankelijk $\Longrightarrow V(X + Y) = V(X) + V(Y)$	(Vgl. 7.24)

X, Y onafh. en $Z = X + Y \implies \mathbb{P}(Z = z) = \sum_x \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = z - x)$ (Convolutiestelling 3.27)

Kansgenererende functie:	$G_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots = \mathbb{E}(s^X)$	(Def 4.7)
Uniekheid kansgen. Functie:	$G_X(s) = G_Y(s) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k)$	(St. 4.13)
Bernoulliverdeling:	$G_X(s) = q + ps$ Binomiale verdeling: $G_X(s) = (q + ps)^n$	(Vb. 4.14,4.15)
Poissonverdeling:	$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$	
Neg. Binomiale verdeling:	$G_X(s) = \left(\frac{ps}{1-qs}\right)^n \quad als\ \lvert s\rvert < q^{-1}$	(Vb. 4.16,4.17)

Als $Y = kX$ dan $G_Y(s) = G_X(s^k)$ en als $Z = k + X$ dan $G_Z(s) = s^k G_X(s)$	(Ex. 4.18)
k^{de} moment X: $\quad \mathbb{E}(X^k)(k \geq 1)$	(Def 4.20)
r^{de}afg. $G_X(s)$ op $s = 1$: ${G_X}^r(1) = E(X[X - 1][X - 2] \dots [X - r + 1])$	(St. 4.23)
$\mathbb{E}(X) = G'(1), V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$	(Vgl. 4.28)
Onafhankelijk $\Leftrightarrow$ $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$	(St. 4.33)

Onafhankelijk en $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ en X_i gelijk verdeeld dan $G_S(s) = G_N(G_X(s))$ (St. 4.36)

$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$	(Verdelingsfunctie)	(Def 5.2)	$F_X(x) \leq F_X(y) \Leftrightarrow x \leq y$	(Vb. 5.5)
$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$	(Vb. 5.6)	$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ (Vb. 5.7)	$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$	(Vgl. 5.23)
Kansdichtheidsfunctie:	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$	(Def 5.20)	$\forall x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = x) = 0$	(St. 5.27)

$\forall a \leq b \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(u)\,du$ (Vb. 5.10, St. 5.27)

Uniforme verdeling : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & als\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & als\ a \leq x \leq b \\ 1 & als\ x > b \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & als\ a < x < b \\ 0 & elders \end{cases}$ (Vb. 5.15, 5.36)

Exponentiële verdeling: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & als\ x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & als\ x > 0 \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 0 & als\ x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & als\ x > 0 \end{cases}$ (Vb. 5.16, 5.37)

Normale verdeling: $X \sim Norm(\mu, \sigma^2)$: $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (Vb. 5.38)

Cauchy verdeling: $X \sim Cauchy$: $\quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (Vb. 5.39)

Gammaverdeling: $X \sim Gamma(w > 0, \lambda > 0)$: $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(w)} \lambda^w x^{w-1} e^{-\lambda x} & als\ x > 0 \\ 0 & als\ x \leq 0 \end{cases}$ (Vb. 5.40)

Met $\Gamma(\omega) = \int_0^\infty x^{\omega-1} e^{-x}\,dx$ (Als $w \in \mathbb{N}$: $\Gamma(w) = (w - 1)!$ Ex. 5.46)

Bètaverdeling: $X \sim Beta(s, t > 0)$: $\quad f(x) = \frac{1}{B(s,t)} x^{s-1}(1 - x)^{t-1}$ als $0 < x < 1$ (Vb. 5.42)

Met $B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$ Als $s = t = 1$ dan $X \sim Uniform[0,1]$ (Vgl. 5.43)

Als X continu, g continu stijgend of dalend, $Y = g(X)$ dan $f_Y(y) = \pm f_X\big(g^{-1}(y)\big)\frac{d}{dy}[g^{-1}(y)]$ (St. 5.50)

$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$ (Def. 5.57) $\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$ (St. 5.58)

$X \sim Uniform$ dan	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}(a+b)$	$Var(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$	(Ex. 5.63)
$X \sim Exp(\lambda)$ dan	$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$	$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$	(Ex. 5.64)
$X \sim Norm(\mu, \sigma^2)$	$\mathbb{E}(X) = \mu$	$Var(X) = \sigma^2$	(Ex. 5.65)
$X \sim Cauchy$	$\mathbb{E}(X) = geen\ waarde$	$Var(X) = geen\ waarde$	(Ex. 5.66)

Onafhankelijk $\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x)\mathbb{P}(Y \le y)$ (Def 6.7)

Onafhankelijk $\Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ (Vb. 6.8) Onafhankelijk $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y)$ (St. 6.31)

$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) & als\ de\ afgeleide\ bestaat\ in\ (x,y) \\ 0 & elders \end{cases}$ (Vb. 6.18)

$f_{X,Y}(x,y) \ge 0\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (Vb. 6.19) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dxdy\ = 1$ (Vb. 6.20)

Convolutiestelling: $Als\ Z = X + Y\ \ dan\ f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$ (St. 6.38)

Als T een bijectie van $(x,y) \to (u,v)$ dan $f_{U,V} = \begin{cases} f_{X,Y}\big(x(u,v)y(u,v)\big)|J(u,v)| & als\ (u,v) \in S \\ 0 & elders \end{cases}$ (St. 6.50)

Met $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ (Vgl. 6.48)

$f_{(Y|X)}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ (Def 6.57) $\mathbb{E}\big(g(X,Y)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} g(x,y)f_{X,Y}(x,y)\ d(x,y)$ (St. 6.62)

Onafhankelijk $\Leftrightarrow \mathbb{E}\big(g(X)h(Y)\big) = \mathbb{E}\big(g(X)\big)\mathbb{E}(h(Y))$ (St. 6.66)

$\mathbb{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}\ dy$ (Def 6.68)

$[\mathbb{E}(UV)]^2 \le \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2)$ (Cauchy-Schwarz 7.30)

Momentgenererende functie: $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = G_X(e^t)$ (Def 7.39)

Onafhankelijk $\Leftrightarrow M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ (St. 7.52) $M_{aX+b}(t) = e^{tb}M_X(at)$ (Vgl. 7.51)

Uniciteit M: $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) < \infty, \delta > 0$ Dan $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbb{E}\big(X^k\big)\ voor\ |t| < \delta$ (St. 7.55)

Markovs ongelijkheid: $\mathbb{P}(X \ge t) \le \frac{\mathbb{E}(X)}{t}\ \ als\ t > 0\ en\ X > 0$ (St. 7.63)

Jensens ongelijkheid: $\mathbb{E}\big(g(X)\big) \ge g(\mathbb{E}(X))$ als $\mathbb{E}|g(X)| < \infty\ en\ g\ convex$ (St. 7.67)

Convex $\Leftrightarrow raaklijn\ ligt\ onder\ grafiek \Leftrightarrow Koorde\ tussen\ twee\ punten\ ligt\ altijd\ boven\ de\ grafiek$

Convergeren in $L^2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}([Z_n - Z]^2) = 0$ (Def 8.3)

Als X_i onafh. gelijk verdeeld, dan $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \to \mu\ \ \ in\ L^2$ (St. 8.6)

Convergeren in kans $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Z_n - Z| > \epsilon) = 0$ (Def 8.12)

Z_n convergeert in $L^2 \Longrightarrow Z_n$ convergeert in kans (St. 8.14)

Chebychevs ong.: $\mathbb{P}(|Y| \ge t) \le \frac{1}{t^2}\mathbb{E}(Y^2)\ als\ t > 0\ en\ \mathbb{E}(Y^2) < \infty$ (St. 8.15)

Centrale limietstelling: Als X_i onafh. gelijk verdeeld , $|\mathbb{E}(X_i)| < \infty, |Var(X_i)| < \infty$ dan is $S = X_1 + X_2 + \cdots$ te benaderen als $Norm(0,1)$ (St. 8.25)

Continuïteitssteling: Als $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$ dan X is te benaderen (conv. in verd.) als $Norm(0,1)$ (St. 8.27)

Markov eigenschap: volgende stap is gebaseerd op heden en niet verleden en $\sum_{y\in\{0,1\}} P_{xy} = 1$

2 states: $P_{ij} = \mathbb{P}(x_{n+1} = j | X_n = i)$ met $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$

$\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = (P^n)_{xy}$ $\mu^{(n)} = \mu P^n$ met μ de kansverdeling

μ constant $\Longrightarrow \mu_0 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ en $\mu_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ (invariant)

$\alpha = \beta \ne 0 \ne 1$ $\mu = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, conv. exp. met $P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta + \alpha(1-\alpha-\beta)^n & \alpha - \alpha(1-\alpha-\beta)^n \\ \beta - \beta(1-\alpha-\beta)^n & \alpha + \beta(1-\alpha-\beta)^n \end{pmatrix}$

$\alpha = \beta = 0$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lim_{n\to\infty} P = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$

$\alpha = \beta = 1$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lim_{n\to\infty} P = P$

Wandeling in $\mathbb{Z}$: $p_n(0,0) = 1, p_{2n+1}(0,0) = 0$ en $p_{2n} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ (kans op terugkeren oorsprong)

$f_n(0,0) = 1, f_{2n+1}(0,0) = 0$ (eerste keer terugkeren oorsprong)

$G(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(0,0)z^n$ en $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0,0)z^n$ (Form. 15,16)

$G(z) = \frac{1}{1-F(z)}$ en $\lim_{z\uparrow 1} G(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\uparrow 1} F(z) = 1$ (Prop. 3.1)

Als $p \ne q\ dan\ G(1) = (1-4pq)^{-1/2}$ en $1 - F(1) = G(z)^{-1} = (1-4pq)^{\frac{1}{2}} > 0$