



Samenvatting

Lineaire Algebra 2 - Collegejaar 2014-2015

Dictaat Lineaire Algebra 2

Disclaimer

De informatie in dit document is afkomstig van derden. W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' betracht de grootst mogelijke zorgvuldigheid in de samenstelling van de informatie in dit document, maar garandeert niet dat de informatie in dit document compleet en/of accuraat is, noch aanvaardt W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' enige aansprakelijkheid voor directe of indirecte schade welke is ontstaan door gebruikmaking van de informatie in dit document.

De informatie in dit document wordt slechts voor algemene informatie in dit documentdoeleinden aan bezoekers beschikbaar gesteld. Elk besluit om gebruik te maken van de informatie in dit document is een zelfstandig besluit van de lezer en behoort uitsluitend tot zijn eigen verantwoordelijkheid.

LINEAIRE ALGEBRA 2 - SAMENVATTING DICTAAT

Gelijkvormig/congruent: $A = P^T B P$

Gelijksoortig/similar: $A = P^{-1} B P$

(P in beide gevallen inverteerbaar)

1. REVIEW OF EIGENVALUES, EIGENVECTORS AND CHARACTERISTIC POLYNOMIAL

1.1. Complementaire deelruimten. De deelruimtes $U, W \subset V$ zijn complementaire ruimtes als U en W V opspannen en $U \cap W = \{0\}$. Als dit het geval is, geldt $\dim U + \dim W = \dim V$.

1.2. Kern en beeld. De kern van een afbeelding $f: V \rightarrow W$ is $\ker f = f^{-1}(0)$ (alles wat op 0 wordt afgebeeld). Het beeld van een afbeelding $f: V \rightarrow W$ is $\operatorname{im} f = f(V)$.

Stelling: Als $f: V \rightarrow W$ lineair is, dan geldt: $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$.

1.3. Matrices. Bij een lineaire afbeelding $f_A: F^n \rightarrow F^n$ hoort een $n \times n$ -matrix A . Hiervoor geldt:

- $\ker f_A = \ker A =$ orthogonaal complement van rijruimte
- $\operatorname{im} f_A = \operatorname{im} A =$ kolomruimte
- $\dim \ker A + \dim \operatorname{Row} A = \dim \mathbb{R}^n = n$

Stelling: f_A is injectief $\iff \ker f_A = \{0\}$

Stelling: $\det A = 0 \iff f_A$ is niet injectief $\iff f_A$ is geen isomorfisme

1.4. Multipliciteit. Er geldt altijd: meetkundige multipliciteit $\leq$ algebraïsche multipliciteit. Daarnaast is de som van de algebraïsche multipliciteiten altijd gelijk aan de dimensie van de vectorruimte V .

1.5. Diagonaliseerbaar. Het endomorfisme $f: V \rightarrow V$ is diagonaliseerbaar als er een basis van V bestaat die uit eigenvectoren van f bestaat. De matrix bij f ten opzichte van deze eigenbasis is dan een diagonaalmatrix, met de eigenwaarden op de diagonaal.

Als $V \in F^n$, dan kan een $n \times n$ -matrix A worden geïdentificeerd met f . Deze matrix A is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als:

- Er een inverteerbare matrix P bestaat zodat $P^{-1} A P$ een diagonaalmatrix is.
- De som van de meetkundige multipliciteiten van de eigenwaarden gelijk is aan de dimensie van de ruimte.
- Het karakteristiek polynoom een product van lineaire factoren is.

- Voor elke eigenwaarde geldt dat de meetkundige multipliciteit en de algebraïsche multipliciteit gelijk zijn.

2. THE CAYLEY-HAMILTON THEOREM AND THE MINIMAL POLYNOMIAL

2.1. Karakteristiek polynoom. Het karakteristiek polynoom van twee gelijksoortige matrices (matrices A en B waarvoor $A = PBP^{-1}$) is hetzelfde.

Stelling van Cayley-Hamilton: $A \in \text{Mat}(n, F) \implies P_A(A) = 0$

2.2. Minimumpolynoom. Het minimumpolynoom M_A van een matrix A (of endomorfisme f_A) is het monische polynoom met zo laag mogelijke graad, waarvoor A een nulpunt is (dus $M_A(A) = 0$). Ieder polynoom p waarvoor geldt $p(A) = 0$ is daarbij deelbaar door M_A (dus het karakteristiek polynoom is altijd deelbaar door het minimumpolynoom).

Propositie: Voor $A \in \text{Mat}(n, F)$ en $\lambda \in F$ geldt: als λ een nulpunt van het karakteristiek polynoom van A is, dan is het ook een nulpunt van het minimumpolynoom van A . Beide polynomen hebben dus dezelfde lineaire factoren.

Propositie: Voor $A \in \text{Mat}(n, F)$ geldt: A is diagonaliseerbaar $\iff M_A$ is een product van verschillende monische lineaire factoren.

3. THE STRUCTURE OF NILPOTENT ENDOMORPHISMS

3.1. Nilpotent. Een matrix $A \in \text{Mat}(n, F)$ is nilpotent als $A^m = 0$ voor een $m \geq 1$. Het minimumpolynoom M_A is dan van de vorm x^m (waarbij m het laagste getal is waarvoor $A^m = 0$), en $P_A(x) = x^n$.

Stelling: Een nilpotente matrix A is diagonaliseerbaar $\iff A = 0$.

Stelling: Laat V een F -vectorruimte zijn met dimensie n en laat $f: V \rightarrow V$ een nilpotent endomorfisme zijn. Dan heeft V een basis $v_1, v_2, \dots, v_n$ zodat $f(v_j)$ óf 0 óf v_{j+1} is.

De matrix $A = (a_{ij})$ bij f ten opzichte van $v_n, \dots, v_1$ is dan een blokdiagonale ma-

$$\text{trix: } A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & B_{n-k} \end{array} \right) \text{ met } B_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Gevolg: Elke nilpotente matrix is gelijksoortig met een blokdiagonale matrix van de vorm hierboven, ofwel voor iedere nilpotente matrix B bestaat er een inverteerbare matrix C zodat $C^{-1}BC = A$, voor A zoals hierboven.

4. DIRECT SUMS OF SUBSPACES

4.1. Directe som van deelruimtes. Als V een vectorruimte is en $U_i \subset V$ (voor $i \in I$) zijn lineaire deelruimten, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

- Elke $v \in V$ kan uniek worden geschreven als $v = \sum_{i \in I} u_i$ met $u_i \in U_i$ voor alle $i \in I$ (waarbij slechts eindig veel vectoren u_i ongelijk aan 0 zijn).
- $\sum_{i \in I} U_i = V$ en voor alle $j \in I$ geldt $U_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i = \{0\}$.
- Als B_i een basis is voor U_i (voor $i \in I$), dan zijn de verschillende B_i paarsgewijs disjunct en is $\bigcup_{i \in I} B_i$ een basis voor V .
- V is de directe som van de deelruimten U_i . Dit wordt genoteerd als $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, of als $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$ (waarbij $I = \{1, 2, \dots, n\}$).

4.2. Directe som van endomorfismen. Laat V een vectorruimte zijn met lineaire deelruimten U_i ($i \in I$) zodat $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$ en laat $f_i: U_i \rightarrow U_i$ een endomorfisme zijn voor iedere $i \in I$. Dan bestaat er een uniek endomorfisme $f: V \rightarrow V$ zodat $f|_{U_i} = f_i$ voor elke $i \in I$. Hierbij wordt f de directe som van de f_i genoemd (dus $f = \bigoplus_{i \in I} f_i$).

Opmerking: Als V eindig-dimensionaal is en B een basis voor V is die de vereniging van bases B_i van U_i is, dan is de matrix bij f ten opzichte van B een blokdiagonale matrix, met als blokken de matrixen bij de f_i ten opzichte van de B_i .

Lemma: Er bestaan endomorfismen $f_i: U_i \rightarrow U_i$ voor $i \in I$ zodat $f = \bigoplus_{i \in I} f_i \iff U_i$ is invariant onder f (of f -invariant), ofwel $f(U_i) \subset U_i$.

Propositie: Laat V een vectorruimte zijn en $f: V \rightarrow V$ een endomorfisme. Laat $p(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_k(x)$ een polynoom zijn zodat $p(f) = 0$ en zodat de factoren $p_i(x)$ paarsgewijs copriem zijn (dus er bestaan polynomen $a_1(x)$ en $a_2(x)$ zodat $a_1(x)p_1(x) + a_2(x)p_2(x) = 1$). Laat $U_i = \ker(p_i(f))$. Dan geldt $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ en dan zijn de U_i f -invariant. Hierbij geldt $f = f_1 \oplus \dots \oplus f_k$, waarbij $f_i = f|_{U_i}$.

5. THE JORDAN NORMAL FORM THEOREM

5.1. Coprieme polynomen. Als $p(x)$ een polynoom (over F) is en voor $\lambda \in F$ geldt $p(\lambda) \neq 0$, dan zijn $(x - \lambda)^m$ en $p(x)$ copriem voor elke $m \geq 1$.

Stelling: Laat V een eindig-dimensionale vectorruimte zijn en laat $f: V \rightarrow V$ een endomorfisme zijn, waarvan het karakteristiek polynoom een product van lineaire factoren is: $P_f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$, waar de λ_i verschillend zijn. Dan geldt voor $U_j = \ker(f - \lambda_j \text{id}_V)^{m_j}$ (de **generaliseerde λ_j -eigenruimte** van f) dat $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

5.2. Stelling Jordan-Normaalvorm. Als $f: V \rightarrow V$ (met V eindig-dimensionaal) een endomorfisme is waarvoor $P_f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$, dan bestaat er een basis van V , ten opzichte waarvan de matrix bij f een blokdiagonaalmatrix is met

blokken van de vorm $B(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}(F, m)$, waarbij

$\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

Gevolg: Voor zo'n endomorfisme $f: V \rightarrow V$ geldt dat f uniek kan worden geschreven als $f = d + n$, met endomorfismen d en n van V , zodat d diagonaliseerbaar is, n nilpotent is en d en n commuteren (dus $d \circ n = n \circ d$).

5.3. Zwakkere vorm reële Jordan-Normaalvorm. Voor een endomorfisme $f: V \rightarrow V$ met V reëel en eindig-dimensionaal geldt dat er een basis van V bestaat ten opzichte waarvan de matrix bij f een blokdiagonaalmatrix is met blokken van de vorm $B(\lambda, m)$ en van de vorm:

$$B'(\lambda, \mu, m) = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\mu & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m).$$

Hierbij geldt $\mu > 0$. Deze blokken komen voor als P_f deelbaar is door $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + \mu^2$.

5.4. Simultane diagonaliseerbaarheid. Als endomorfismen $f_1, \dots, f_k: V \rightarrow V$ met V eindig-dimensionaal in paren commuteren, dan zijn $f_1, \dots, f_k$ simultaan diagonaliseerbaar, dus er bestaat een basis van V van vectoren die eigenvectoren zijn voor alle f_i . Elke lineaire combinatie van deze endomorfismen is dan ook weer diagonaliseerbaar.

6. THE DUAL VECTOR SPACE

6.1. Duale vectorruimte. Een **lineaire vorm** op een F -vectorruimte V is een lineaire afbeelding $\phi: V \rightarrow F$. De duale vectorruimte van V is $V^* = \text{Hom}(V, F)$, dit zijn alle lineaire vormen op V . Als V eindig-dimensionaal is, geldt $\dim V^* = \dim V$.

Als V een eindig-dimensionale vectorruimte is met basis $v_1, \dots, v_n$, dan heeft V^* een unieke basis $v_1^*, \dots, v_n^*$ zodat $v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{als } i = j \\ 0, & \text{als } i \neq j \end{cases}$. De basis $v_1^*, \dots, v_n^*$ is de **duale basis** van $v_1, \dots, v_n$. Andersom geldt dit ook.

Stelling: De **biduale** van een vectorruimte V is $V^{**} = (V^*)^*$. Er bestaat een

injectief homomorfisme $\alpha_V: V \rightarrow V^{**}$, als V eindig-dimensionaal is is dit een isomorfisme.

Propositie: $\alpha_V^T \circ \alpha_{V^*} = \text{id}_{V^*}$. Als V eindig-dimensionaal is, geldt ook $\alpha_V^T = \alpha_{V^*}^{-1}$.

6.2. Duale afbeeldingen. Als V en W F -vectorruimten zijn en $f: V \rightarrow W$ is een lineaire afbeelding, dan is de duale/getransponeerde afbeelding gedefinieerd als $f^T: W^* \rightarrow V^*$, $w^* \mapsto f^T(w^*) = w^* \circ f$.

Propositie: Als $f: V \rightarrow W$ een isomorfisme is, dan is $f^T: W^* \rightarrow V^*$ dit ook. Er geldt hierbij $(f^T)^{-1} = (f^{-1})^T$.

Propositie: Als $f: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding is, die ten opzichte van bepaalde basissen wordt gerepresenteerd door de matrix A , dan is de matrix die f^T ten opzichte van de duale basissen hiervan de matrix A^T .

Gevolg: Als V een eindig-dimensionale vectorruimte is met basissen $v_1, \dots, v_n$ en $w_1, \dots, w_n$ en P is de basistransformatiematrix van $v_1, \dots, v_n$ naar $w_1, \dots, w_n$, dan is P^{-T} de basistransformatiematrix van $v_1^*, \dots, v_n^*$ naar $w_1^*, \dots, w_n^*$.

Gevolg: Voor eindig-dimensionale vectorruimten V en W geldt dat $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W^*, V^*)$, $f \mapsto f^T$ een isomorfisme is.

6.3. Annihilator. De annihilator van een deelverzameling $S \subset V$ met V een vectorruimte is $S^\circ = \{v^* \in V^*: v^*(v) = 0 \text{ voor alle } v \in S\}$. S° is een lineaire deelruimte van V^* .

Stelling: Voor een eindig-dimensionale vectorruimte V en een lineaire deelruimte $W \subset V$ geldt $\dim W + \dim W^\circ = \dim V$ en $\alpha_V(W) = W^{\circ\circ}$.

Stelling: Voor vectorruimten V en W en een lineaire afbeelding $f: V \rightarrow W$ geldt $(\text{im}(f))^\circ = \ker(f^T)$ en $(\ker(f))^\circ = \text{im}(f^T)$. Als V en W eindig-dimensionaal zijn, volgt hieruit $\dim \text{im}(f^T) = \dim \text{im}(f)$.

Opmerking: Als f wordt gerepresenteerd door een matrix A , dan is het beeld van f gelijk aan de kolomruimte van A (dus aan het span van de kolommen).

7. NORMS ON REAL VECTOR SPACES

7.1. Normen. Een norm op een reële vectorruimte V is een afbeelding $V \rightarrow \mathbb{R}$ (meestal geschreven als $x \mapsto \|x\|$), waarvoor geldt:

- $\|x\| \geq 0$ (en $\|x\| = 0 \iff x = 0$) voor alle $x \in V$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ voor alle $x, y \in V$ (driehoeksongelijkheid)

Verder is voor een norm gedefinieerd: $d(x, y) = \|x - y\|$.

Verschillende standaardnormen zijn:

- De **maximumnorm**: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$
- De **Euclidische norm**: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
- De **somnorm** (of **1-norm**): $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

Lemma: Elke norm op $\mathbb{R}^n$ is continu.

7.2. Equivalente normen. Twee normen $x \mapsto \|x\|_1$ en $x \mapsto \|x\|_2$ op een reële vectorruimte V zijn equivalent als er $C_1, C_2 > 0$ bestaan zodat $C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$ voor alle $x \in V$.

Stelling: Op een eindig-dimensionale, reële vectorruimte zijn alle normen equivalent.

8. BILINEAR FORMS

8.1. Bilineaire afbeeldingen. Een afbeelding $\phi: V_1 \times V_2 \rightarrow W$ (met V_1, V_2 en W F -vectorruimten) is bilineair als:

- $\forall \lambda, \lambda' \in F, x, x' \in V_1$ en $y \in V_2$ geldt: $\phi(\lambda x + \lambda' x', y) = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x', y)$
- $\forall \lambda, \lambda' \in F, x \in V_1$ en $y, y' \in V_2$ geldt: $\phi(x, \lambda y + \lambda' y') = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x, y')$

ϕ is een **bilineaire vorm** als $W = F$. Als $V_1 = V_2 = V$ en $W = F$, dan is ϕ een bilineaire vorm op V . Zo'n bilineaire vorm kan verschillende eigenschappen hebben, hij is:

- **symmetrisch** als $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ voor alle $x, y \in V$
- **alternerend** als $\phi(x, x) = 0$ voor alle $x \in V$
- **anti-symmetrisch** als $\phi(x, y) = -\phi(y, x)$ voor alle $x, y \in V$ (volgt direct uit alterneren)

De verzameling van alle bilineaire vormen op $V \times W$ wordt genoteerd als $\text{Bil}(V, W)$, de verzameling bilineaire vormen op V is $\text{Bil}(V)$.

8.2. Linker- en rechterkern. Bij een bilineaire vorm $\phi: V \times W \rightarrow F$ horen de lineaire afbeeldingen $\phi_L: V \rightarrow W^*, v \mapsto (w \mapsto \phi(v, w))$ en $\phi_R: W \rightarrow V^*, w \mapsto (v \mapsto \phi(v, w))$. De deelruimte $\ker(\phi_L) \subset V$ heet de **linkerkern** van ϕ (bestaat uit alle $v \in V$ waarvoor $\phi(v, w) = 0$ voor alle $w \in W$), de deelruimte $\ker(\phi_R) \subset W$ heet de **rechterkern** van ϕ .

Een bilineaire vorm is **niet-gedegeneerd** als ϕ_L en ϕ_R isomorfismen zijn. In dit geval hebben V en W dezelfde eindige dimensie.

Stelling Als V en W eindigdimensionaal zijn, dan is $\phi: V \times W \rightarrow F$ niet-gedegeneerd dan en slechts dan als zowel de linker- als de rechterkern triviaal zijn. Als hierbij geldt $W = V$, hoeft slechts één van de kernen triviaal te zijn.

Opmerking: De bilineaire vorm $\phi: V \times V \rightarrow F$ is symmetrisch dan en slechts dan als $\phi_R = \phi_L$.

Gevolg: Voor een eindig-dimensionale vectorruimte V en een niet-gedegeneerde bilineaire vorm ϕ op V geldt dat iedere lineaire vorm $\psi \in V^*$ te schrijven is als $\psi(w) = \phi(v, w)$ voor een unieke $v \in V$.

8.3. Matrixrepresentatie. Als V en W eindig-dimensionale vectorruimtes zijn met basissen $v_1, \dots, v_n$ en $w_1, \dots, w_m$, dan kan een bilineaire vorm $\phi: V \times W \rightarrow F$ (ten opzichte van deze basissen) worden gerepresenteerd door een matrix $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, F)$, waarbij $a_{ij} = \phi(v_j, w_i)$. Dan geldt voor $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ en $w = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m$ dat $\phi(v, w) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i$.

Propositie Als B_1 en B_2 basissen voor V zijn, en C_1 en C_2 zijn basissen voor W ,

waarbij P de transformatiematrix van B_1 naar B_2 is en Q de transformatiematrix van C_1 naar C_2 , en de matrix A de bilineaire vorm ϕ ten opzichte van B_1 en C_1 representeert en A' deze bilineaire vorm ten opzichte van B_2 en C_2 , dan geldt $A' = Q^T A P$.

Lemma: Voor een bilineaire vorm ϕ op een eindig-dimensionale vectorruimte V , waarbij een matrix A hoort, geldt:

- ϕ is symmetrisch $\iff A^T = A$
- ϕ is anti-symmetrisch $\iff A^T + A = 0$
- ϕ is alternerend $\iff A^T + A = 0$ en alle getallen op de diagonaal van A zijn 0
- ϕ is niet-gedegeneerd $\iff \det A \neq 0$.

8.4. Orthogonale directe som. De bilineaire vorm ϕ is de orthogonale directe som van ψ en ψ' als:

- ϕ is een bilineaire vorm op V , ψ op U en ψ' op U'
- $V = U \oplus U'$
- Voor $u_1, u_2 \in U$ en $u'_1, u'_2 \in U'$ geldt $\phi(u_1 + u'_1, u_2 + u'_2) = \psi(u_1, u_2) + \psi'(u'_1, u'_2)$

Als $V = U \oplus U'$, dan is dit het geval dan en slechts dan als $\phi(u, u') = 0$ en $\phi(u', u) = 0$ voor alle $u \in U$ en $u' \in U'$ (waarbij $\psi = \phi|_{U \times U}$ en $\psi' = \phi|_{U' \times U'}$).

8.5. Symmetrische bilineaire vormen. Als ϕ een symmetrische bilineaire vorm op V is, en $U \subset V$ is een lineaire deelruimte, dan is $U^\perp = \{v \in V : \phi(v, u) = 0 \text{ voor alle } u \in U\}$ de deelruimte **orthogonaal** op U (ten opzichte van ϕ).

Propositie: Als hierbij geldt dat $\phi|_{U \times U}$ niet-gedegeneerd is, dan geldt $V = U \oplus U^\perp$. $U^\perp$ heet dan ook wel het **orthogonale complement** van U .

Lemma: Als V een F -vectorruimte is met $\text{char}(F) \neq 2$, en ϕ is een symmetrische bilineaire vorm op V met $\phi \neq 0$, dan bestaat er tenminste één $v \in V$ waarvoor $\phi(v, v) \neq 0$.

Stelling: Als ϕ een symmetrische bilineaire vorm op een eindig-dimensionale F -vectorruimte V is, met $\text{char}(F) \neq 2$, dan bestaat er een basis $v_1, \dots, v_n$ van V ten opzichte waarvan ϕ wordt gerepresenteerd door een diagonaalmatrix. (Ofwel elke symmetrische matrix $A \in \text{Mat}(n, F)$ is congruent met een diagonaalmatrix.)

8.6. Rang en signatuur. Als F algebraïsch gesloten is (bijvoorbeeld $F = \mathbb{C}$), dan is iedere symmetrische matrix $A \in \text{Mat}(n, F)$ congruent met een matrix $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$.

De **rang** $0 \leq r \leq n$ is hierbij uniek bepaald.

Stelling: Elke symmetrische matrix $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ is congruent met een unieke

matrix van de vorm $\left(\begin{array}{c|c|c} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Het getal $r + s$ is hierbij gelijk aan de **rang** van A , het getal $r - s$ is de **signatuur** van A .

8.7. Positief definit. Een symmetrische bilineaire vorm ϕ op een reële vectorruimte V is positief definit als $\phi(v, v) > 0$ voor alle $v \in V \setminus \{0\}$. Hieruit volgt ook dat ϕ niet-gedegeneerd is.

Stelling: Een symmetrische matrix $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$, waarbij de submatrix A_j het $j \times j$ blok linksboven is, is positief definit dan en slechts dan als $\det(A_j) > 0$ voor elke $1 \leq j \leq n$.

9. INNER PRODUCT SPACES

9.1. Reële inproductruimte. Een inproduct op een reële vectorruimte V is een positief definit, symmetrische bilineaire vorm op V , meestal geschreven als $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$, waarvoor geldt:

- $\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$
- $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\langle x, x \rangle > 0$ voor alle $x \neq 0$

Een reële vectorruimte met zijn inproduct wordt een **reële inproductruimte** genoemd.

9.2. Complexe inproductruimte. Een **sesquilineaire vorm** op een complexe vectorruimte V is een afbeelding $\phi: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, die lineair is in het eerste argument en geconjugeerd-lineair in het tweede, dus waarvoor geldt:

- $\phi(\lambda x + \lambda' x', y) = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x', y)$
- $\phi(x, \lambda y + \lambda' y') = \bar{\lambda} \phi(x, y) + \bar{\lambda}' \phi(x, y')$

Een **Hermitesese vorm** op V is een sesquilineaire vorm ϕ op V waarvoor geldt $\phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)}$ voor alle $x, y \in V$. Hierbij geldt dus $\phi(x, x) \in \mathbb{R}$.

Een complex **inproduct** is een positief definit Hermitesese vorm die voldoet aan dezelfde voorwaarden als het reële inproduct, behalve dat $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.

9.3. Eigenschappen inproductruimtes. Voor een inproductruimte V geldt:

- Voor $x \in V$ geldt **norm** $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$, met $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ en $d(x, y) = \|x - y\|$. Verder is x een **eenheidsvector** als $\|x\| = 1$.
- $x, y \in V$ zijn **orthogonaal** ($x \perp y$) als $\langle x, y \rangle = 0$.
- $S \subset V$ is een **orthogonale deelverzameling** als $x \perp y$ voor alle $x, y \in S$ waarvoor $x \neq y$. Als ook geldt dat $\|x\| = 1$ voor elke $x \in S$, dan is S een **orthonormale deelverzameling**.
- $v_1, \dots, v_n \in V$ vormen een **orthonormale basis** van V als de vectoren een basis vormen en een orthonormale verzameling zijn.
- **Cauchy-Schwarz ongelijkheid:** Voor $x, y \in V$ geldt $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (met gelijkheid dan en slechts dan als x en y lineair afhankelijk zijn).

9.4. Orthonormale basissen. Laat V een inproductruimte zijn met $x_1, \dots, x_k \in V$ lineair onafhankelijk. Definieer $x^\bullet = x/\|x\|$ en noem:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^\bullet \\ y_2 &= (x_2 - \langle x_2, y_1 \rangle y_1)^\bullet \\ y_3 &= (x_3 - \langle x_3, y_1 \rangle y_1 - \langle x_3, y_2 \rangle y_2)^\bullet \\ &\vdots \\ y_k &= (x_k - \langle x_k, y_1 \rangle y_1 - \dots - \langle x_k, y_{k-1} \rangle y_{k-1})^\bullet \end{aligned}$$

Dan is $y_1, \dots, y_k$ een orthonormale basis van $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$.

Gevolg: Elke eindig-dimensionale inproductruimte heeft een orthonormale basis.

Propositie: Als V een inproductruimte is en $S \subset V$ is een orthogonale verzameling van niet-nulvectoren, dan is S lineair onafhankelijk.

Stelling (Bessels ongelijkheid): Voor een orthonormale verzameling $\{e_1, \dots, e_n\}$ in een inproductruimte V geldt dat voor alle $x \in V$: $\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Als

$U = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ geldt verder dat de volgende uitspraken equivalent zijn voor $x \in V$:

- $x \in U$
- $\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 = \|x\|^2$
- $x = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$
- $\forall y \in V, \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle$.

9.5. De geadjungeerde afbeelding. Als V en W twee inproductruimten over hetzelfde veld ($\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$) zijn, met V eindig-dimensionaal en $f: V \rightarrow W$ lineair, dan bestaat er een unieke afbeelding $f^*: W \rightarrow V$ zodat $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle$ voor alle $v \in V$ en $w \in W$, deze afbeelding heet de **geadjungeerde** van f . Eigenschappen van de geadjungeerde:

- Als $f: V \rightarrow V$ een geadjungeerde f^* heeft, waarvoor $f = f^*$, dan is f **zelfgeadjungeerd**.
- Als $f: V \rightarrow V$ een geadjungeerde f^* heeft, waarvoor $f \circ f^* = f^* \circ f$, dan is f **normaal**.
- Een isomorfisme $f: V \rightarrow W$ is een **isometrie** als $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ voor alle $v, w \in V$.
- Voor $f, g: V \rightarrow W$ geldt: $(f + g)^* = f^* + g^*$ en $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$.
- Voor $f: V \rightarrow W$ en $h: W \rightarrow Z$ geldt: $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*$.
- Voor $f: V \rightarrow W$ geldt: $(f^*)^* = f$.

Propositie: Als V en W inproductruimten over hetzelfde veld zijn, met dezelfde dimensie, en $f: V \rightarrow W$ is lineair, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

- f is een isometrie
- f is een isomorfisme en $f^{-1} = f^*$
- $f \circ f^* = \text{id}_W$
- $f^* \circ f = \text{id}_V$

Stelling: Voor een eindig-dimensionale inproductruimte V en een lineaire afbeelding $f: V \rightarrow V$ geldt $\text{im}(f^*) = (\ker(f))^\perp$ en $\ker(f^*) = (\text{im}(f))^\perp$.

Propositie: Als V en W inproductruimten over hetzelfde veld zijn, met orthonormale basissen B en C , en de lineaire afbeelding $f: V \rightarrow W$ wordt ten opzichte van B en C gerepresenteerd door de matrix A , dan wordt de geadjungeerde f^* ten opzichte van B en C gerepresenteerd door de matrix $A^* = \bar{A}^T$.

Gevolg: Als hierbij $V = W$, dan geldt:

- f is zelfgeadjungeerd $\iff A^* = A$
- f is normaal $\iff A^*A = AA^*$
- f is een isometrie $\iff AA^* = I$

9.6. Eigenschappen matrices. Een matrix $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ is:

- symmetrisch als $A^T = A$
- normaal als $AA^T = A^T A$
- orthogonaal als $AA^T = I_n$

Een matrix $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ is:

- Hermitiaans als $A^* = A$
- normaal als $AA^* = A^*A$
- unitair als $AA^* = I_n$

10. ORTHOGONAL DIAGONALIZATION

10.1. Orthogonale diagonaliseerbaarheid. Orthodiagonaliseerbaar betekent dat er een orthonormale basis van eigenvectoren bestaat.

Lemma: Als een endomorfisme $f: V \rightarrow V$, met V een inproductruimte, orthodiagonaliseerbaar is, dan is f normaal.

Lemma: Voor een normaal endomorfisme $f: V \rightarrow V$ met V een inproductruimte geldt:

- $\|f^*(v)\| = \|f(v)\|$
- $f(v) = \lambda v \implies f^*(v) = \bar{\lambda}v$
- $f(v) = \lambda v$ en $f(w) = \mu w$ met $\lambda \neq \mu \implies v \perp w$

Lemma: Als V een inproductruimte is over het veld F en $f: V \rightarrow V$ is normaal, dan geldt voor ieder polynoom $p \in F[X]$ dan $p(f)$ ook normaal is.

Lemma: Als $f: V \rightarrow V$ (met V een eindig-dimensionale inproductruimte) normaal is, dan is $V = \ker(f) \oplus \text{im}(f)$ een orthogonale directe som.

Lemma: Als V een eindig-dimensionale complexe inproductruimte is, en $f: V \rightarrow V$ is normaal, dan is f diagonaliseerbaar.

Stelling: De lineaire afbeelding $f: V \rightarrow V$ met V een eindig-dimensionale, complexe inproductruimte is orthodiagonaliseerbaar dan en slechts dan als f normaal is.

Propositie: Een lineaire afbeelding $f: V \rightarrow V$ met V een eindig-dimensionale, complexe inproductruimte is normaal met alleen reële eigenwaarden dan en slechts dan als f zelfgeadjungeerd is.

Stelling: Een lineaire afbeelding $f: V \rightarrow V$ met V een eindig-dimensionale, reële inproductruimte is orthodiagonaliseerbaar dan en slechts dan als f zelfgeadjungeerd is.

Stelling: Een vierkante matrix A met reële elementen is orthogonaal gelijksoortig met een diagonaalmatrix (dus er bestaat een orthogonale matrix P waarvoor $PP^T = I$, zodat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is) dan en slechts dan als A symmetrisch is. In dit geval kan P zo worden gekozen dat de oriëntatie niet verandert, dus zodat $\det P = 1$ (en niet -1).