



Samenvatting

Lineaire Algebra 2 - Collegejaar 2012-2013

Dictaat Lineaire Algebra 2

Disclaimer

De informatie in dit document is afkomstig van derden. W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' betracht de grootst mogelijke zorgvuldigheid in de samenstelling van de informatie in dit document, maar garandeert niet dat de informatie in dit document compleet en/of accuraat is, noch aanvaardt W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' enige aansprakelijkheid voor directe of indirecte schade welke is ontstaan door gebruikmaking van de informatie in dit document.

De informatie in dit document wordt slechts voor algemene informatie in dit documentdoeleinden aan bezoekers beschikbaar gesteld. Elk besluit om gebruik te maken van de informatie in dit document is een zelfstandig besluit van de lezer en behoort uitsluitend tot zijn eigen verantwoordelijkheid.

1 Cayley-Hamilton en het Minimale Polynoom

Met F of K bedoelen we een lichaam (*field*), met $\text{Mat}(n, F)$ de F -vectorruimte van dimensie n^2 en met $\text{Mat}(n, R)$ de matrixring of het bestaande uit vierkante $n \times n$ -matrices.

Noem $P_A(x)$ het karakteristiek polynoom van de matrix A . Deze ziet eruit als

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

Stelling 1 (Cayley-Hamilton) Zij $A \in \text{Mat}(n, F)$. Dan geldt $P_A(A) = 0$.

Lemma 1 (Polynomiale deling) Laat f en g polynomen zijn met g monisch. Dan zijn er unieke polynomen q en r zodat $r = 0$ of $\deg(r) < \deg(g)$ en zodat

$$f = qg + r$$

Lemma 2 Zij $A \in \text{Mat}(n, F)$. Er bestaat een uniek monisch polynoom $M_A(x)$ van minimale graad zodat $M_A(A) = 0$. Als $p(x)$ een polynoom is met $p(A) = 0$, dan is p deelbaar door M_A .

Dit polynoom M_A heet het *minimale polynoom* van A .

Propositie 1 Zij $A \in \text{Mat}(n, F)$ en $\lambda \in F$. Als λ een nulpunt van het karakteristiek polynoom van A is, dan is het ook een nulpunt van het minimale polynoom van A .

Propositie 2 Zij $A \in \text{Mat}(n, F)$. Dan is A diagonaliseerbaar dan en slechts dan als zijn minimale polynoom M_A een product is van verschillende monische lineaire factoren.

2 De structuur van nilpotente endomorfismen

Definitie 1 Een matrix $A \in \text{Mat}(n, F)$ heet **nilpotent** als $A^m = 0$ voor een of andere $m \geq 1$. Op dezelfde manier: Als V een eindigdimensionale vectorruimte is en $f : V \rightarrow V$ een endomorfisme, dan is f nilpotent als $f^m = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{m \text{ keer}} =$

0 voor een of andere $m \geq 1$.

Gevolg 1 Een nilpotente matrix of endomorfisme is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als hij nul is.

Stelling 2 Zij V een F -vectorruimte, met $\dim V = n$ en laat $f : V \rightarrow V$ een nilpotent endomorfisme zijn. Dan heeft V een basis $v_1, v_2, \dots, v_n$ zodat $f(v_j)$ ofwel 0 is ofwel v_{j+1} is.

Een matrix $A = (a_{ij})$ die f representeert ten opzichte van $v_n, \dots, v_1$, waarbij f een endomorfisme zoals in bovenstaande stelling is, is een *blokdiagonaalmatrix*

met alle kentallen 0 behalve $a_{j,j+1} = 1$ als $f(v_{n-j}) = v_{n+1-j}$. Oftewel: A ziet eruit als

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & B_{n-k} \end{array} \right) \quad \text{waarbij } B_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Een nilpotente matrix is gelijkvormig met de matrix van de bovenstaande vorm.

Gevolg 2 Een matrix $A \in \text{Mat}(n, F)$ is nilpotent dan en slechts dan als $P_A(x) = x^n$.

3 Directe sommen van deelruimten

Lemma 3 Zij V een vectorruimte en $U_i \subset V \forall i \in I$ lineaire deelruimten. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

1. Elke $v \in V$ kan uniek geschreven worden als $v = \sum_{i \in I} u_i$ met $u_i \in U_i$ voor alle $i \in I$.
2. $\sum_{i \in I} U_i = V$, en voor alle $j \in I$ hebben we $U_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i = \{0\}$
3. Als B_i een basis van U_i is voor $i \in I$, dan zijn de B_i paarsgewijs disjunct, en $\bigcup_{i \in I} B_i$ is een basis van V

Als aan deze condities wordt voldaan, zeggen we dat V de **directe som** van de deelruimten U_i is en we schrijven $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$. Als $I = \{1, 2, \dots, n\}$, dan schrijven we $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$.

Lemma 4 Zij V een vectorruimte met lineaire deelruimten U_i ($i \in I$) zodat $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$. Voor alle $i \in I$, laat $f_i : U_i \rightarrow U_i$ een endomorfisme zijn. Dan bestaat er een uniek endomorfisme $f : V \rightarrow V$ zodat $f|_{U_i} = f_i$ voor alle $i \in I$. We noemen f de **directe som** van de f_i en we schrijven $f = \bigoplus_{i \in I} f_i$

Lemma 5 Zij V een vectorruimte met lineaire deelruimten U_i ($i \in I$) zodat $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$. Zij $f : V \rightarrow V$ een endomorfisme. Dan bestaan er endomorfismen $f_i : U_i \rightarrow U_i$ voor $i \in I$ zodanig dat $f = \bigoplus_{i \in I} f_i$ dan en slechts dan als elke U_i invariant is onder f , oftewel: $f(U_i) \subset U_i$.

Lemma 6 Zij V een vectorruimte en $f : V \rightarrow V$ een endomorfisme. Zij $p(x) = p_1(x)p_2(x)$ een polynoom zodat $p(f) = 0$ en zodat $p_1(x)$ en $p_2(x)$ copriem zijn (dwz: er bestaan polynomen $a_1(x)$ en $a_2(x)$ zodat $a_1(x)p_1(x) + a_2(x)p_2(x) = 1$.) Zij $U_i = \ker(p_i(f))$ voor $i = 1, 2$. Dan is $V = U_1 \oplus U_2$ en de U_i zijn f -invariant. In het bijzonder geldt ook $f = f_1 \oplus f_2$ waarbij $f_i = f|_{U_i}$.

Propositie 3 Zij V een vectorruimte en $f : V \rightarrow V$ een endomorfisme. Zij $p(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_k(x)$ een polynoom zodat $p(f) = 0$ en zodat de p_i paarsgewijs copriem zijn. Zij $U_i = \ker(p_i(f))$. Dan is $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ en de U_i zijn f -invariant. In het bijzonder geldt $f = f_1 \oplus \dots \oplus f_k$ waarbij $f_i = f|_{U_i}$.

4 De Jordan-normaalvormstelling

Lemma 7 Als $p(x)$ een polynoom (over F) is en $\lambda \in F$ zodanig dat $p(\lambda) \neq 0$, dan zijn $(x - \lambda)^m$ en $p(x)$ copriem voor alle $m \geq 1$.

Stelling 3 Zij V een eindigdimensionale vectorruimte, en zij $f : V \rightarrow V$ een endomorfisme waarvan het karakteristiek polynoom in lineaire factoren gesplitst kan worden:

$$P_f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

waarbij de λ_i verschillend zijn. Dan is $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ waarbij $U_j = \ker(f - \lambda_j \text{id}_V)^{m_j}$ de generaliseerde λ_j -eigenruimte van f is.

Stelling 4 (Jordan-normaalvorm) Zij V een eindigdimensionale vectorruimte, en $f : V \rightarrow V$ een endomorfisme waarvan het karakteristiek polynoom in lineaire factoren gesplitst kan worden:

$$P_f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

waarbij de λ_i verschillend zijn. Dan bestaat er een basis van V zodanig dat de matrixrepresentatie f van die basis een blokdiagonaalmatrix is met blokken van de vorm

$$B(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n, F)$$

waarbij $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

Gevolg 3 Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en zij $f : V \rightarrow V$ een endomorfisme waarvan het karakteristiek polynoom te splitsen is in lineaire factoren, zoals hierboven. Dan kunnen we $f = d + n$ schrijven, waarbij d en n endomorfismen van V zijn, zodat d diagonaliseerbaar is en n nilpotent is. d en n commuteren: $d \circ n = n \circ d$. Deze d en n zijn uniek bepaald.

Stelling 5 (Reële Jordan-normaalvorm) Zij V een eindigdimensionale reële vectorruimte en $f : V \rightarrow V$ een endomorfisme. Dan bestaat er een basis van V zodanig dat de matrixrepresentatie f van deze basis een blokdiagonaalmatrix is met blokken van de vorm $B(\lambda, m)$ en van de vorm

$$B'(\lambda, \mu, m) = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\mu & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2m, \mathbb{R})$$

met $\mu > 0$.

Blokken van de vorm $B(\lambda, m)$ komen voor, voor eigenwaarden λ van f . Blokken van de vorm $B'(\lambda, \mu, m)$ komen voor als $P_f(x)$ deelbaar is door $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + \mu^2$.

Stelling 6 Zij V een eindigdimensionale vectorruimte, $f_1, \dots, f_k : V \rightarrow V$ diagonaliseerbare endomorfismen die paarsgewijs commuteren. Dan zijn $f_1, \dots, f_k$ simultaan diagonaliseerbaar: er bestaat een basis voor V die uit vectoren bestaat die elk eigenvectoren zijn van alle f_j . In het bijzonder is elke lineaire combinatie van de f_j weer diagonaliseerbaar.

5 De duale vectorruimte

Definitie 2 Zij V een F -vectorruimte. Een **lineaire vorm** of **lineaire functionaal** van V is een lineaire afbeelding $\phi : V \rightarrow F$. De **duale vectorruimte** van V is $V^* = \text{Hom}(V, F)$, de vectorruimte van alle lineaire vormen op V .

De vectorruimtestructuur op V^* is als volgt gedefinieerd: Voor $\phi, \psi \in V^*$ en $\lambda, \mu \in F$ hebben we voor $v \in V$:

$$(\lambda\phi + \mu\psi)(v) = \lambda\phi(v) + \mu\psi(v)$$

Propositie 4 Zij V een eindigdimensionale vectorruimte met basis $v_1, \dots, v_n$. Dan heeft V^* een unieke basis $v_1^*, \dots, v_n^*$ zodat

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

Deze basis $v_1^*, \dots, v_n^*$ van V^* heet de **duale basis** van $v_1, \dots, v_n$ of de **basis dual aan** $v_1, \dots, v_n$.

Als V eindig dimensionaal is, geldt $\dim V = \dim V^*$.

Stelling 7 Zij V een vectorruimte. Dan is er een kanoniek injectief homomorfisme $\alpha_V : V \rightarrow V^{**}$ van V naar zijn biduale $V^{**} = (V^*)^*$. Het is een isomorfisme wanneer V eindig dimensionaal is.

Gevolg 4 Zij V een eindigdimensionale vectorruimte, en zij $v_1^*, \dots, v_n^*$ een basis van V^* . Dan bestaat er een unieke basis $v_1, \dots, v_n$ van V zodat $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.

Definitie 3 Zij V en W F -vectorruimtes en $f : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding. Dan is de **duale lineaire afbeelding** van f gedefinieerd als

$$f^T = W^* \rightarrow V^*, w^* \mapsto f^T(w^*) = w^* \circ f$$

Het volgende diagram verduidelijkt deze definitie:

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{w^*} F$$

f^T is weer lineair, en $(f_2 \circ f_1)^T = f_1^T \circ f_2^T$.

Propositie 5 Zij $f : V \rightarrow W$ een isomorfisme. Dan is $f^T : W^* \rightarrow V^*$ ook een isomorfisme, en $(f^T)^{-1} = (f^{-1})^T$.

Propositie 6 Zij V en W eindigdimensionale vectorruimtes met bases $v_1, \dots, v_n$ en $w_1, \dots, w_m$. Zij $v_1^*, \dots, v_n^*$ en $w_1^*, \dots, w_m^*$ de corresponderende duale bases van V^* en W^* . Zij $f : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding, gerepresenteerd door de matrix A naar de gegeven bases van V en W . Dan is de matrix die f^T representeert naar de duale bases A^T .

Gevolg 5 Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en zij $v_1, \dots, v_n$ en $w_1, \dots, w_n$ twee bases van V . Laat $v_1^*, \dots, v_n^*$ en $w_1^*, \dots, w_n^*$ de corresponderende duale bases zijn. Als P de matrix is die geassocieerd wordt met het veranderen van de basis van V van $v_1, \dots, v_n$ naar $w_1, \dots, w_n$, dan is de matrix geassocieerd met het veranderen van de basis van V^* van $v_1^*, \dots, v_n^*$ naar $w_1^*, \dots, w_n^*$ de matrix $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T =: P^{-T}$.

Propositie 7 Zij V en W vectorruimtes en $f : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding. Dan commuteert het volgende diagram:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \alpha_V \downarrow & & \downarrow \alpha_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{TT}} & W^{**} \end{array}$$

Propositie 8 Zij V een vectorruimte. Dan hebben we $\alpha_V^T \circ \alpha_{V^*} = \text{id}_{V^*}$. Als V eindig dimensionaal is, dan is $\alpha_V^T = \alpha_{V^*}^{-1}$.

Gevolg 6 Zij V en W eindigdimensionale vectorruimten. Dan is

$$\text{Hom}(V, W) \ni f \mapsto f^T \in \text{Hom}(W^*, V^*)$$

een isomorfisme.

Definitie 4 Zij V een vectorruimte en $S \subset V$ een deelruimte van V . Dan heet

$$S^\circ = \{v^* \in V^* : v^*(v) = 0 \text{ voor alle } v \in S\} \subset V^*$$

de **annihilator** van S .

Stelling 8 Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en $W \subset V$ een lineaire deelruimte. Dan hebben we

$$\dim W + \dim W^\circ = \dim V \quad \text{en} \quad \alpha_V(W) = W^{\circ\circ}$$

Dus we hebben $W^{\circ\circ} = W$ als we V en V^{**} identificeren via α_V .

Stelling 9 Zij V en W vectorruimten en $f : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding. Dan is

$$(\text{im}(f))^\circ = \ker(f^T) \quad \text{en} \quad (\ker(f))^\circ = \text{im}(f^T)$$

En als V en W eindig dimensionaal zijn, hebben we

$$\dim \text{im}(f^T) = \dim \text{im}(f)$$

Voor matrices wordt de uitspraak " $(\ker(f))^\circ = \text{im}(f^T)$ " gelijk aan "Als B een kernmatrix is van A , dan is A^T een kernmatrix van B^T ".

Een kernmatrix van een matrix A is gedefinieerd als een matrix waarvan de kolommen $\ker(A)$ opspannen. Met deze definitie volgt dat het beeld van B de annihilator van het beeld van A is dan en slechts dan als B de kernmatrix van A^T is. De voorwaarde dat B een kernmatrix van A^T is betekent $A^T B = 0$ en $A^T x = 0 \Rightarrow \exists y : x = By$. En omdat het annihilator-zijn een symmetrische relatie is, vinden we dat B de kernmatrix is van A^T dan en slechts dan als A een kernmatrix van B^T is.

6 Normen op reële vectorruimten

Definitie 5 Zij V een reële vectorruimte. Een **norm** op V is een afbeelding $V \rightarrow \mathbb{R}$, meestal geschreven als $x \mapsto \|x\|$ zodat

1. $\|x\| \geq 0$ voor alle $x \in V$, en $\|x\| = 0$ dan en slechts dan als $x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}, x \in V$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ voor alle $x, y \in V$ (driehoeksongelijkheid)

De volgende normen zijn standaard (met $V = \mathbb{R}^n$):

1. De maximumnorm: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$
2. De Euclidische norm: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
3. De 1-norm: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

Een norm op de reële vectorruimte V definieert tevens een afstandsmaat:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Lemma 8 Elke norm op $\mathbb{R}^n$ is continu als afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$.

Definitie 6 Zij V een reële vectorruimte en $x \mapsto \|x\|_1$ en $x \mapsto \|x\|_2$ twee normen op V . De twee normen heten **equivalent** als er $C_1, C_2 > 0$ bestaan zodat

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \quad \text{voor alle } x \in V$$

Stelling 10 In een eindigdimensionale reële vectorruimte zijn alle normen equivalent.

7 Bilineaire vormen

Definitie 7 Zij V_1, V_2 en W F -vectorruimten. Een afbeelding $\phi : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ is **bilineair** als het lineair is in beide argumenten:

$$\forall \lambda, \lambda' \in F, x, x' \in V_1, y \in V_2 \quad : \quad \phi(\lambda x + \lambda' x', y) = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x', y) \text{ en}$$

$$\forall \lambda, \lambda' \in F, x \in V_1, y, y' \in V_2 \quad : \quad \phi(x, \lambda y + \lambda' y') = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x, y')$$

Als $W = F$, een scalairenlichaam, dan is ϕ een **bilineaire vorm**.

Als $V_1 = V_2 = V$ en $W = F$, dan is ϕ een bilineaire vorm op V . Deze is **symmetrisch** als $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ voor alle $x, y \in V$, en **alternerend** als $\phi(x, x) = 0$ voor alle $x \in V$. Als ϕ alternerend is, is deze ook **scheefsymmetrisch**, dus $\phi(x, y) = -\phi(y, x)$ voor alle $x, y \in V$.

We noteren de verzameling met alle bilineaire vormen op $V \times W$ met $\text{Bil}(V, W)$, en we noteren de verzameling met alle bilineaire vormen op V met $\text{Bil}(V)$. Deze verzamelingen zijn F -vectorruimten.

Lemma 9 Een bilineaire vorm $\phi : V \times W \rightarrow F$ induceert lineaire afbeeldingen

$$\phi_L : V \rightarrow W^*, v \mapsto (w \mapsto \phi(v, w)) \quad \text{en} \quad \phi_R : W \rightarrow V^*, w \mapsto (v \mapsto \phi(v, w))$$

De deelruimte $\ker(\phi_L) \subset V$ heet de **linkerkern** van ϕ (de verzameling van alle $v \in V$ zodat $\phi(v, w) = 0$ voor alle $w \in W$). Op dezelfde manier is $\ker(\phi_R) \subset W$ de **rechterkern** van ϕ .

De bilineaire vorm ϕ heet **niet-gedegenereerd** als ϕ_L en ϕ_R isomorfismen zijn. V en W hebben dan dezelfde dimensie.

Lemma 10 Als V en W eindigdimensionale vectorruimten zijn, dan is ϕ niet-gedegenereerd dan en slechts dan als zowel de linker- als de rechterkern triviaal zijn.

De bilineaire vorm $\phi : V \times V \rightarrow F$ is symmetrisch dan en slechts dan als $\phi_R = \phi_L$.

Propositie 9 Zij V en W F -vectorruimten. Dan is er een isomorfisme

$$\beta_{V,W} : \text{Bil}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W^*), \phi \mapsto \phi_L$$

met een inverse gegeven door

$$f \mapsto ((v, w) \mapsto (f(v))(w))$$

Gevolg 7 Zij V een eindigdimensionale vectorruimte, en zij ϕ een niet-gedegenereerde bilineaire vorm op V . Dan kan elke lineaire vorm $\psi \in V^*$ geschreven worden als $\psi(w) = \phi(v, w)$ voor een unieke $v \in V$.

We kunnen het voorgaande ook interpreteren met matrices:

Zij $\phi : F^n \times F^m \rightarrow F$ een bilineaire vorm. ϕ kan gerepresenteerd worden door een matrix $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, F)$, met kentallen $a_{ij} = \phi(e_j, e_i)$. In termen van kolomvectoren $x \in F^n$ en $y \in F^m$ hebben we

$$\phi(x, y) = y^T A x.$$

Als V en W eindigdimensionale vectorruimten over F zijn, en we bases $v_1, \dots, v_n$ voor V en $w_1, \dots, w_m$ voor W hebben, dan kunnen we voor elke bilineaire vorm $\phi : V \times W \rightarrow F$ een matrix A schrijven ten opzichte van deze bases. Hiervoor identificeren we V met F^n en W met F^m en $a_{ij} = \phi(v_j, w_i)$. Als $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ en $w = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m$ (oftewel: $v \in V$ en $w \in W$), dan is

$$\phi(v, w) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i$$

Propositie 10 *Zij V en W eindigdimensionale vectorruimten over F . Kies twee bases $v_1, \dots, v_n$ en $v'_1, \dots, v'_n$ van V en twee bases $w_1, \dots, w_m$ en $w'_1, \dots, w'_m$ van W .*

Zij A de matrix die de bilineaire vorm $\phi : V \times W \rightarrow F$ representeert ten opzichte van de bases $v_1, \dots, v_n$ en $w_1, \dots, w_m$. Zij A' de matrix die ϕ representeert ten opzichte van de bases $v'_1, \dots, v'_n$ en $w'_1, \dots, w'_m$.

Als P de matrix is geassocieerd met de basistransformatie van $v_1, \dots, v_n$ naar $v'_1, \dots, v'_n$ en Q de matrix is geassocieerd met de basistransformatie van $w_1, \dots, w_m$ naar $w'_1, \dots, w'_m$ dan volgt er

$$A' = Q^T A P$$

In het bijzonder: Als ϕ een bilineaire vorm is in de n -dimensionale vectorruimte V , dan wordt ϕ gerepresenteerd door een vierkante matrix $A \in \text{Mat}(n, F)$. Als we de basis veranderen, dan is de nieuwe matrix $B = P^T A P$ met $P \in \text{Mat}(n, F)$ inverteerbaar. Matrices A en B van deze vorm heten **congruent**.

Lemma 11 *Zij ϕ een bilineaire vorm in de eindigdimensionale vectorruimte V , gerepresenteerd door de matrix A ten opzichte van een willekeurige basis. Dan gelden de volgende eigenschappen:*

1. *ϕ is symmetrisch dan en slechts dan als $A^T = A$*
2. *ϕ is scheefsymmetrisch dan en slechts dan als $A^T + A = 0$*
3. *ϕ is alternerend dan en slechts dan als $A^T + A = 0$ en alle diagonale kentallen van A gelijk aan 0 zijn*
4. *ϕ is niet-gedegeneerd dan en slechts dan als $\det A \neq 0$.*

Definitie 8 *Als $V = U \oplus U'$, ϕ een bilineaire vorm is op V en ψ en ψ' bilineaire vormen zijn op resp. U en U' , en voor $u_1, u_2 \in U$ en $u'_1, u'_2 \in U'$ geldt*

$$\phi(u_1 + u'_1, u_2 + u'_2) = \psi(u_1, u_2) + \psi'(u'_1, u'_2)$$

dan is ϕ de directe orthogonale som van ψ en ψ' . Dit is het geval dan en slechts dan als $\phi(u, u') = 0$ en $\phi(u', u) = 0$ voor alle $u \in U, u' \in U'$.

Dit kan natuurlijk gegeneraliseerd worden voor een willekeurig aantal termen waarin V opgesplitst kan worden. Als we ϕ representeren door een matrix ten opzichte van een basis die de directe som respecteert, dan is de matrix een blokdiagonaalmatrix.

Definitie 9 *Zij ϕ een symmetrische bilineaire vorm op V en zij $U \subset V$ een lineaire deelruimte van V . Dan is*

$$U^\perp = \{v \in V : \phi(v, u) = 0 \text{ voor alle } u \in U\}$$

*de deelruimte **orthogonaal op** U .*

Propositie 11 *Zij ϕ een symmetrische bilineaire vorm op V en zij $U \subset V$ een lineaire deelruimte zodat $\phi|_{U \times U}$ niet-gedegeneerd is. Dan is $V = U \oplus U^\perp$ en ϕ wordt op eenzelfde wijze opgesplitst als een orthogonale directe som.*

We noemen $U^\perp$ het **orthogonaal complement** van U .

Lemma 12 *Neem aan dat $\text{char}(F) \neq 2$ en zij V een F -vectorruimte en ϕ een symmetrische bilineaire vorm op V . Als $\phi \neq 0$, dan is er een $v \in V$ zodat $\phi(v, v) \neq 0$.*

Stelling 11 *Neem aan dat $\text{char}(F) \neq 2$, zij V een eindigdimensionale F -vectorruimte en ϕ een symmetrische bilineaire vorm op V . Dan bestaat er een basis $v_1, \dots, v_n$ van V zodat ϕ gerepresenteerd wordt door een diagonaalmatrix ten opzichte van deze basis.*

Equivalent hiermee is: Elke symmetrische matrix $A \in \text{Mat}(n, F)$ is congruent met een diagonaalmatrix.

Stelling 12 (Classificatie van symmetrische bilineaire vormen over $\mathbb{C}$.) *Zij F algebraïsch gesloten (elk polynoom heeft een nulpunt in dat lichaam), bijvoorbeeld $F = \mathbb{C}$. Dan is elke symmetrische matrix $A \in \text{Mat}(n, F)$ congruent met een matrix*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

en de Rank $0 \leq r \leq n$ is uniek bepaald.

Voor $F = \mathbb{R}$ geldt een soortgelijke uitspraak. Beschouw daarvoor eerst de volgende definitie:

Definitie 10 *Zij V een reële vectorruimte, ϕ een symmetrische bilineaire vorm op V . Dan is ϕ **positief definit** als*

$$\phi(v, v) > 0 \quad \text{voor alle } v \in V \setminus \{0\}$$

Stelling 13 (Classificatie van symmetrische bilineaire vormen over $\mathbb{R}$.) *Elke symmetrische matrix $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ is congruent met een unieke matrix van de vorm*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

*het getal $r + s$ heet de **rank** van A of van de corresponderende bilineaire vorm, en het getal $r - s$ heet de **signatuur** van A of van de corresponderende bilineaire vorm.*

Stelling 14 (Criterium voor het positieve definit-zijn) *Zij $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Zij A_j de submatrix van A van het $j \times j$ -blok linksbovenin. Dan is (de bilineaire vorm gegeven door) A positief definit dan en slechts dan als $\det A_j > 0$ voor alle $1 \leq j \leq n$.*

8 Inproductruimten

Definitie 11 *Zij V een reële vectorruimte. Een **inproduct** op V is een positief definit bilineaire vorm op V . Het wordt meestal geschreven in de vorm $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$. Het inproduct voldoet aan de volgende eigenschappen:*

1. $\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$

2. $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, x \rangle > 0$ voor $x \neq 0$.

Een reële vectorruimte met het inproduct heet een **reële inproductruimte** (Euclidische ruimte).

Merk op dat een inproduct op V een injectief homomorfisme $V \rightarrow V^*$ induceert, door $x \in V$ naar de lineaire vorm $y \mapsto \langle x, y \rangle$ te sturen. Dit homomorfisme is een isomorfisme wanneer V eindig dimensionaal is.

Voor complexe waarden is het niet mogelijk om een bilineaire vorm te gebruiken; je zou dan $\langle ix, ix \rangle = -\langle x, x \rangle$ krijgen en inproducten kunnen niet negatief zijn. De oplossing hiervoor is **Hermitische** vormen in plaats van bilineaire vormen te gebruiken.

Definitie 12 Zij V een complexe vectorruimte. Een **sesquilineaire vorm** op V is een afbeelding $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ die lineair is in de eerste term en semilineair in de tweede term:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x + \lambda' x', y) &= \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x', y) \\ \phi(x, \lambda y + \lambda' y') &= \bar{\lambda} \phi(x, y) + \bar{\lambda}' \phi(x, y')\end{aligned}$$

Een **Hermitische vorm** op V is een sesquilineaire vorm ϕ op V zodat $\phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)}$ voor alle $x, y \in V$. Dit impliceert ook dat $\phi(x, x) \in \mathbb{R}$. De Hermitische vorm ϕ is **positief definitief** wanneer $\phi(x, x) > 0$ voor alle $x \in V \setminus \{0\}$. Een positief definitieve Hermitische vorm op de complexe vectorruimte V heet ook wel een **inproduct** op V . Deze wordt meestal genoteerd als $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$. We hebben de volgende eigenschappen:

1. $\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
3. $\langle x, x \rangle > 0$ voor $x \neq 0$

Een complexe vectorruimte met een inproduct heet een **complexe inproductruimte**. Een reële of complexe vectorruimte met een inproduct heet simpelweg een **inproductruimte**.

Als V een complexe vectorruimte is, noteren we met $\bar{V}$ de complexe vectorruimte met dezelfde onderliggende verzameling en optelling als in V , maar met scalaire vermenigvuldiging door de complex geconjugeerde te nemen: $\lambda \cdot v = \bar{\lambda} v$, waar we links scalaire vermenigvuldiging hebben op $\bar{V}$ en rechts scalaire vermenigvuldiging op V .

We noteren met $\bar{V}^* = \overline{V^*}$ de duale van deze ruimte. Als V een complexe inproductruimte is, krijgen we wederom injectieve homomorfismen

$$V \rightarrow \bar{V}^*, x \mapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle) \quad \text{en} \quad \bar{V} \rightarrow V^*, x \mapsto (y \mapsto \langle y, x \rangle)$$

en dit zijn isomorfismen wanneer V eindig dimensionaal is.

Definitie 13 Zij V een inproductruimte zijn. Dan gelden de volgende uitspraken:

1. Voor $x \in V$ schrijven we $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$. x heet een **eenheidsvector** als $\|x\| = 1$.
2. We zeggen dat $x, y \in V$ **orthogonaal** zijn (notatie: $x \perp y$) als $\langle x, y \rangle = 0$.
3. Een deelverzameling $S \subset V$ is **orthogonaal** als $x \perp y$ voor alle $x, y \in S$ zodat $x \neq y$. S is een **orthonormale verzameling** als ook geldt dat $\|x\| = 1 \forall x \in S$.
4. $v_1, \dots, v_n \in V$ is een **orthonormale basis** van V als de vectoren een basis vormen die een orthonormale verzameling is.

Propositie 12 Zij V een inproductruimte. De volgende uitspraken gelden:

1. Voor $x \in V$ en een scalar λ hebben we $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
2. (**Cauchy-Schwarz-ongelijkheid**) Voor $x, y \in V$ hebben we $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, waarbij deze termen gelijk zijn dan en slechts dan als x en y lineair afhankelijk zijn.
3. (**Driehoeksongelijkheid**) Voor $x, y \in V$ hebben we $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Deze eigenschappen impliceren dat $\|\cdot\|$ een norm op V is en de norm definieert net als in hoofdstuk 6 een afstandsmaat:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Stelling 15 (Gram-Schmidt-orthonormalisatie) Zij V een inproductruimte. Voor $0 \neq x \in V$ schrijven we $x^\bullet = x/\|x\|$. Zij $x_1, \dots, x_k \in V$ lineair onafhankelijk en definieer

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^\bullet \\ y_2 &= (x_2 - \langle x_2, y_1 \rangle y_1)^\bullet \\ y_3 &= (x_3 - \langle x_3, y_1 \rangle y_1 - \langle x_3, y_2 \rangle y_2)^\bullet \\ &\vdots \\ y_k &= (x_k - \langle x_k, y_1 \rangle y_1 - \dots - \langle x_k, y_{k-1} \rangle y_{k-1})^\bullet \end{aligned}$$

Dan is $y_1, \dots, y_k$ een orthonormale basis van $L(x_1, \dots, x_k)$.

Gevolg 8 Elke eindigdimensionale inproductruimte heeft een orthonormale basis.

Gevolg 9 Als V een n -dimensionale inproductruimte is en $\{e_1, \dots, e_k\} \subset V$ is een orthonormale verzameling, dan bestaan er $e_{k+1}, \dots, e_n \in V$ zodat $e_1, \dots, e_n$ een orthonormale basis is van V .

Propositie 13 Zij V een inproductruimte en $S \subset V$ een orthogonale verzameling van niet-nulvectoren. Dan is S lineair onafhankelijk.

Stelling 16 (Bessels ongelijkheid) Zij V een inproductruimte en zij $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ een orthonormale verzameling. Dan hebben we voor alle $x \in V$ de ongelijkheid

$$\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Zij $U = L(e_1, \dots, e_n)$ de deelruimte opgespannen door $e_1, \dots, e_n$. Dan zijn voor $x \in V$ de volgende uitspraken equivalent:

1. $x \in U$
2. $\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 = \|x\|^2$
3. $x = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$
4. voor alle $y \in V$ geldt $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle$

In het bijzonder gelden eigenschap (2) en (4) voor alle $x \in V$ wanneer $e_1, \dots, e_n$ een orthonormale basis is van V (Parsevals identiteit)

Stelling 17 Zij V en W twee inproductruimten over hetzelfde lichaam $(\mathbb{R} \text{ of } \mathbb{C})$, met V eindig dimensionaal, en zij $f : V \rightarrow W$ lineair. Dan is er een unieke lineaire afbeelding $f^* : W \rightarrow V$ zodat

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle$$

voor alle $v \in V, w \in W$.

Definitie 14 Zij V en W inproductruimtes over hetzelfde lichaam. De volgende eigenschappen gelden dan:

1. Zij $f : V \rightarrow W$ lineair. Als f^* bestaat met de eigenschap zoals deze in de vorige stelling gegeven is, dan heet f^* de **geadjungeerde** van f
2. Als $f : V \rightarrow V$ een geadjungeerde f^* heeft en $f = f^*$, dan is f **zelfgeadjungeerd**
3. Als $f : V \rightarrow V$ een geadjungeerde f^* heeft en $f \circ f^* = f^* \circ f$, dan heet f **normaal**
4. Een isomorfisme $f : V \rightarrow W$ is een **isometrie** als $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ voor alle $v, w \in V$.

Propositie 14 (Eigenschappen van de geadjungeerde) Laat V_1, V_2, V_3 eindigdimensionale inproductruimten over hetzelfde lichaam zijn, en zij $f, g : V_1 \rightarrow V_2, h : V_2 \rightarrow V_3$ lineair. Dan

1. $(f + g)^* = f^* + g^*, (\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$
2. $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*$
3. $(f^*)^* = f$

Propositie 15 (Eigenschappen van isometrieën) Zij V en W inproductruimten van dezelfde eindige graad en over hetzelfde lichaam en zij $f : V \rightarrow W$ lineair. Dan zijn de volgende eigenschappen equivalent:

1. f is een isometrie
2. f is een isomorfisme en $f^{-1} = f^*$.
3. $f \circ f^* = \text{id}_W$
4. $f^* \circ f = \text{id}_V$

Stelling 18 Zij V een eindigdimensionale inproductruimte en $f : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding. Dan hebben we

$$\operatorname{im}(f^*) = (\ker(f))^\perp \quad \text{en} \quad \ker(f^*) = (\operatorname{im}(f))^\perp$$

Propositie 16 Zij V en W twee inproductruimten over hetzelfde lichaam, en laat $v_1, \dots, v_n$ en $w_1, \dots, w_m$ orthonormale bases van V en W zijn, en zij $f : V \rightarrow W$ lineair. Als f gerepresenteerd wordt door de matrix A ten opzichte van de gegeven bases, dan wordt de geadjungeerde afbeelding f^* gerepresenteerd door de geconjugeerde getransponeerde matrix $A^* = \overline{A}^T$ ten opzichte van dezelfde bases.

Als deze bases niet orthonormaal zijn, geldt deze eigenschap *niet* in het algemeen.

Gevolg 10 Als in de situatie zoals hierboven geldt $V = W$ dan gelden de volgende uitspraken

1. f is zelfgeadjungeerd dan en slechts dan als $A^* = A$
2. f is normaal dan en slechts dan als $A^*A = AA^*$
3. f is een isometrie dan en slechts dan als $AA^* = I$.

Definitie 15 Een matrix $A \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$ is

1. **symmetrisch** als $A^T = A$
2. **normaal** als $AA^T = A^T A$
3. **orthogonaal** als $AA^T = I_n$

Een matrix $A \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{C})$ is

1. **Hermitisch** als $A^* = A$
2. **normaal** als $AA^* = A^*A$
3. **unitair** als $AA^* = I_n$

9 Orthogonale diagonalisatie

Lemma 13 Zij V een inproductruimte en $f : V \rightarrow V$ een endomorfisme. Als f orthogonaal diagonaliseerbaar is, dan is f normaal.

Lemma 14 Zij V een inproductruimte, en zij $f : V \rightarrow V$ normaal. Dan gelden de volgende uitspraken

1. $\|f^*(v)\| = \|f(v)\|$
2. Als $f(v) = \lambda v$ voor een of andere $v \in V$, dan is $f^*v = \overline{\lambda}v$.
3. Als $f(v) = \lambda v$ en $f(w) = \mu w$ met $\lambda \neq \mu$, dan geldt $v \perp w$.

Lemma 15 Zij V een inproductruimte over het lichaam $F = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en zij $f : V \rightarrow V$ normaal en $p \in F[X]$ een polynoom. Dan is $p(f)$ ook normaal.

Lemma 16 *Zij V een eindigdimensionale inproductruimte en zij $f : V \rightarrow V$ normaal. Dan is $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ een orthogonale directe som.*

Lemma 17 *Zij V een eindigdimensionale complexe inproductruimte, en zij $f : V \rightarrow V$ normaal. Dan is f diagonaliseerbaar.*

Stelling 19 *Zij V een eindigdimensionale complexe inproductruimte, en zij $f : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding. Dan heeft f een orthonormale basis van eigenvectoren dan en slechts dan als f normaal is.*

Propositie 17 *Zij V een eindigdimensionale complexe inproductruimte, en zij $f : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding. Dan is f normaal met alle eigenwaarden reëel dan en slechts dan als f zelfgeadjungeerd is.*

Stelling 20 *Zij V een eindigdimensionale reële inproductruimte, en zij $f : V \rightarrow V$ lineair. Dan heeft f een orthonormale basis van eigenvectoren dan en slechts dan als f zelfgeadjungeerd is.*

Stelling 21 *Zij A een vierkante matrix met reële kentallen. Dan is A orthogonaal gelijkvormig met een diagonaalmatrix (Er bestaat een orthogonale matrix P met $PP^T = I$ zodat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is) dan en slechts dan als A symmetrisch is. In dit geval kunnen we P kiezen zodat $\det P = 1$ (P heet dan **oriëntatiebewarend**).*

Dit kun je ook geometrisch beschouwen. Als A een symmetrische 2×2 -matrix is, dan definieert de vergelijking

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 1$$

een **kegelsnede** in het vlak. De stelling impliceert nu dat er een rotatie P bestaat zodat $P^{-1}AP$ diagonaal is. Dit betekent dat onze kegelsnede een vergelijking heeft van de vorm

$$ax^2 + bx^2 = 1$$

met a en b de eigenwaarden van A . De richtingen van de eigenvectoren van A heten de **hoofdassen** van de kegelsnede (of van A), en de coördinaattransformatie gegeven bij P is de **hoofdastransformatie**. Soortgelijke uitspraken zijn natuurlijk ook waar voor hogerdimensionale kwadratische oppervlakten.