



Samenvatting

Complexe Functietheorie - Collegejaar 2012-2013

Stellingen

Disclaimer

De informatie in dit document is afkomstig van derden. W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' betracht de grootst mogelijke zorgvuldigheid in de samenstelling van de informatie in dit document, maar garandeert niet dat de informatie in dit document compleet en/of accuraat is, noch aanvaardt W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' enige aansprakelijkheid voor directe of indirecte schade welke is ontstaan door gebruikmaking van de informatie in dit document.

De informatie in dit document wordt slechts voor algemene informatie in dit documentdoeleinden aan bezoekers beschikbaar gesteld. Elk besluit om gebruik te maken van de informatie in dit document is een zelfstandig besluit van de lezer en behoort uitsluitend tot zijn eigen verantwoordelijkheid.

Hoofdstelling van de Algebra. Elk niet-constant complex polynoom heeft evenveel nulpunten als zijn graad.

Heine-Borelstelling. Een verzameling $A \subset \mathbb{R}^p$ is compact dan en slechts dan als hij gesloten en begrensd is.

Cauchy-Riemannstelling. Voor een functie

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C} \text{ open}, \quad a \in D$$

zijn de volgende twee beweringen equivalent:

- (1) f is complex differentieerbaar in a
- (2) f is totaal differentieerbaar in a zoals in de reële analyse ($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) en voor $u = \operatorname{Re} f$ en $v = \operatorname{Im} f$ gelden de volgende differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)$$

Als (1) of (2) geldt heeft men

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a)$$

Impliciete functiestelling. Zij $D \subset \mathbb{C}$ open en $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie met een continue afgeleide.

Deel 1 Als er een punt $a \in D$ geldt dat $f'(a) \neq 0$, dan bestaat er een open verzameling

$$D_0 : D_0 \subset D, a \in D_0$$

zodat de beperking $f|_{D_0}$ injectief is en zodat $f'(z) \neq 0$ voor $z \in D_0$

Als

- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch
- $D \subset \mathbb{C}$ open
- f' is continu
- $f'(a) \neq 0$ voor een $a \in D$

Dan

- Er bestaat een $D_0 \subset D$: $a \in D_0$
- $f|_{D_0}$ is injectief
- $f'(z) \neq 0$ voor $z \in D_0$

Deel 2 Als f injectief is en $f'(z) \neq 0$ voor alle $z \in D$, dan is het beeld $f(D)$ een open deelverzameling van $\mathbb{C}$. De inverse functie $f^{-1} : f(D) \rightarrow \mathbb{C}$ is analytisch, en zijn afgeleide is

$$f^{-1'}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$$

Als

- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch
- $D \subset \mathbb{C}$ open
- f' continu
- f injectief
- $f'(z) \neq 0$ voor alle $z \in D$

Dan

- $f(D)$ is een open deelverzameling van $\mathbb{C}$
- f^{-1} is analytisch
- $f^{-1'}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$

Cauchy Integraalstelling voor driehoekspaden. Zij $f : D \rightarrow \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}$ open een analytische functie. Zij $z_1, z_2, z_3 \in D$ zodat de driehoek die ze opspannen ook in D ligt. Dan geldt

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta = 0$$

Als

- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch
- $D \subset \mathbb{C}$ open
- De driehoek opgespannen door z_1, z_2 en z_3 ligt geheel in D

Dan

- $\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta = 0$

Cauchy Integraalstelling voor sterdomeinen. Zij $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch op een sterdomein $D \subset \mathbb{C}$. Dan verdwijnt de integraal van f over een willekeurige gesloten kromme in D .

Analoog:

Elke analytische functie f gedefinieerd op een sterdomein D heeft een primitieve in D .

Als

- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch
- D een sterdomein

Dan

- $\int_{\alpha} f = 0$ met α een gesloten kromme in D

Cauchy Integraalstelling. Zij

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C} \text{ open}$$

een analytische functie. Neem aan dat de gesloten schijf $\overline{U}_r(z_0)$ volledig besloten is in D . dan geldt voor ieder punt $z \in U_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

waar de integraal loopt over de cirkel α , de gesloten curve

$$\alpha(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Als

- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch
- $D \subset \mathbb{C}$ open
- $\overline{U}_r(z_0)$ ligt volledig in D

Dan

- Voor elke $z \in U_r(z_0)$
- $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

Gegeneraliseerde Cauchy Integraalstelling. Zij $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ open, een analytische functie. Neem weer aan dat de gesloten schijf $\overline{U}_r(z_0)$ volledig besloten is in D . Nu hebben we dat elke analytische functie willekeurig vaak complex differentieerbaar is, en elke afgeleide is weer analytisch. Voor $n \in \mathbb{N}_0$ en z met $|z - z_0| < r$ hebben we

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

waarbij weer geldt $\alpha = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. **Als**

- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch
- $D \subset \mathbb{C}$ open
- $\overline{U}_r(z_0)$ is volledig besloten in D

Dan

- Elke analytische functie is willekeurig vaak complex differentieerbaar
- Elke afgeleide is weer analytisch
- $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$

Stelling van Morera. Zij $D \subset \mathbb{C}$ open en $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continu. Voor elk driehoekspad $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ waarvan de driehoek volledig in D ligt nemen we aan dat

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta = 0$$

Dan is f analytisch.

Als

- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continu
- $D \subset \mathbb{C}$ open
- De driehoek opgespannen door $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ ligt volledig in D
- $\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta = 0$

Dan

- f is analytisch

Stelling van Liouville. Elke begrensde gehele functie is constant.

Stelling van Weierstrass. Zij $f_0 + f_1 + f_2 + \dots$ een normaal convergente reeks van analytische functies op een open verzameling $D \subset \mathbb{C}$. Dan is de limietfunctie ook analytisch en

$$f' = f'_0 + f'_1 + f'_2 + \dots$$

Als

- $f_0, f_1, \dots : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch
- $D \subset \mathbb{C}$ open
- $f_0 + f_1 + f_2 + \dots$ is een normaal convergente reeks

Dan

- f , de limietfunctie, is analytisch
- $f' = f'_0 + f'_1 + f'_2 + \dots$

Machtreeksontwikkelingsstelling. Zij f de analytische functie

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C} \text{ open}$$

We nemen aan dat de open schijf $U_R(a)$ binnen D ligt. Dan krijgt men

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{voor alle } z \in U_R(a), \quad \text{waarbij } a_n := \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n \in \mathbb{N}_0$$

Als

- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch
- $D \subset \mathbb{C}$ open
- $U_R(a)$ ligt binnen D

Dan

- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$
- $a_n := \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Identiteitsstelling. Zij $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ twee analytische functies, gedefinieerd op een domein $D \neq \emptyset$. De volgende beweringen zijn equivalent:

- (1) $f = g$
- (2) De verzameling $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ heeft een verdichtingspunt in D
- (3) Er bestaat een $z_0 \in D$ met $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$

Unicité van analytische voortzetting. Zij $D \subset \mathbb{C}$ een domein, $M \subset D$ een deelverzameling met tenminste één verdichtingspunt in D , en zij $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ een functie. Als er een analytische functie $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{C}$ bestaat die f voortzet ($\tilde{f}(z) = f(z)$ voor alle $z \in M$) dan is $\tilde{f}$ uniek met die eigenschap.

Als

- $D \subset \mathbb{C}$ een domein
- $M \subset D$ heeft een verdichtingspunt in D
- $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ een functie
- $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{C}$ zet f voort

Dan

- $\tilde{f}$ is uniek

Open afbeeldingstelling. Als f een niet-constante analytische functie is op een domein $D \subset \mathbb{C}$, dan is het beeld $f(D)$ open en boogsgewijs verbonden.

Riemann ophefbaarheidsvoorwaarde. Een singulariteit van een analytische functie, $f : D \rightarrow \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}$ open, is ophefbaar dan en slechts dan er een gepunctueerde omgeving $\dot{U} := \dot{U}_r(a) \subset D$ van het punt a bestaat waar f begrensd is.

Casorati-Weierstrass. Zij a een essentiële singulariteit van de analytische functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}$ open. Als $\dot{U} := \dot{U}_r(a)$ een willekeurig gepunctueerd omgeving is van a , dan is het beeld $f(\dot{U} \cap D)$ *dicht* in $\mathbb{C}$. Dus voor elke $b \in \mathbb{C}$ en voor elke $\varepsilon > 0$ hebben we

$$f(\dot{U} \cap \mathbb{C}) \cap U_\varepsilon(b) \neq \emptyset$$

Equivalent is:

Voor elke $b \in \mathbb{C}$ en voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $z \in \dot{U} \cap D$ met

$$|f(z) - b| < \varepsilon$$

Als

- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch
- $D \subset \mathbb{C}$ open
- a is een essentiële singulariteit van f
- $\dot{U}$ is een willekeurig gepunctueerd interval rond a

Dan

- $f(\dot{U} \cap D)$ is dicht in $\mathbb{C}$

Classificatie van singulariteiten door hun afbeeldingseigenschappen. Zij $a \in \mathbb{C}$ een geïsoleerde singulariteit van de analytische functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}$ open. De singulariteit is

- (1) verwijderbaar $\Leftrightarrow f$ is begrensd in een geschikte omgeving van a
- (2) een pool $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$
- (3) essentieel $\Leftrightarrow$ in elke willekeurig kleine omgeving van a nadert de functie f elke waarde willekeurig dicht

Laurentdecompositie. Elke functie die analytisch is op de annulus

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$$

laat een decompositie toe als

$$f(z) = g(z) + h(1/z)$$

waarbij $g : U_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ en $h : U_{1/r}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch zijn. Als $h(0) = 0$ is deze decompositie uniek.

De Residuenstelling. Zij $D \subset \mathbb{C}$ een elementair domein en $z_1, \dots, z_k \in D$ eindig veel punten. Laat verder $f : D \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie en $\alpha : [a, b] \rightarrow D \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ een gesloten stuksgewijs gladde kromme. Dan geldt de volgende formule, de Residuformule:

$$\int_{\alpha} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f; z_j) \chi(\alpha; z_j)$$

Als

- $D \subset \mathbb{C}$ elementair
- $k < \infty$
- $f : D \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch
- $\alpha : [a, b] \rightarrow D \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ gesloten en stuksgewijs glad

Dan

$$\int_{\alpha} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f; z_j) \chi(\alpha; z_j)$$

Stelling van Hurwitz. Zij $f_0, f_1, f_2, \dots : D \rightarrow \mathbb{C}$ een rij analytische functies die lokaal uniform convergeert naar $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Neem aan dat geen van de functies f_n een nulpunt in D heeft. Dan is f ofwel identiek aan 0, of f heeft geen nulpunt in D .

Als

- $f_0, f_1, f_2, \dots : D \rightarrow \mathbb{C}$ een rij analytische functies
- $f_0, f_1, f_2, \dots : D \rightarrow \mathbb{C}$ convergeert naar $f : D \rightarrow \mathbb{C}$
- Geen van de functies f_n heeft een nulpunt in D

Dan

- $f \equiv 0$ OF f heeft geen nulpunt in D

Rouché's stelling. Zij f, g analytische functies op een elementair domein D en zij α een gesloten kromme in D die elk punt in het binnengebied $\text{Int}(\alpha)$ precies één keer omvat. Neem verder aan dat f en $f + g$ eindig veel nulpunten op D hebben. Neem tenslotte aan dat $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$ voor $\zeta \in \text{Image}(\alpha)$. Dan hebben de functies f en $f + g$ geen nulpunten op het beeld van α en de functies f en $f + g$ hebben in $\text{Int}(\alpha)$ hetzelfde aantal nulpunten (multipliciteiten van nulpunten inclusief).

Als

- D elementair
- f, g analytische functies op D
- α een gesloten kromme op D die elk punt in $\text{Int}(\alpha)$ één keer omvat
- f en $f + g$ hebben eindig veel nulpunten op D
- $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$ voor $\zeta \in \text{Image}(\alpha)$

Dan

- f en $f + g$ hebben geen nulpunten op $\text{Image}(\alpha)$
- f en $f + g$ hebben in $\text{Int}(\alpha)$ hetzelfde aantal nulpunten