



Samenvatting

Gewone differentiaalvergelijkingen - Collegejaar 2012-2013

Differential Equations and their Applications, Fourth Edition.

Martin Braun, Springer, 1993, ISBN: 0-387-97894-1

Disclaimer

De informatie in dit document is afkomstig van derden. W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' betracht de grootst mogelijke zorgvuldigheid in de samenstelling van de informatie in dit document, maar garandeert niet dat de informatie in dit document compleet en/of accuraat is, noch aanvaardt W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' enige aansprakelijkheid voor directe of indirecte schade welke is ontstaan door gebruikmaking van de informatie in dit document.

De informatie in dit document wordt slechts voor algemene informatie in dit documentdoeleinden aan bezoekers beschikbaar gesteld. Elk besluit om gebruik te maken van de informatie in dit document is een zelfstandig besluit van de lezer en behoort uitsluitend tot zijn eigen verantwoordelijkheid.

1 Eerste-orde differentiaalvergelijkingen

1.1 Eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen

Een eerste-orde lineaire differentiaalvergelijking (DV) is van de vorm

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

met $a(t)$ en $b(t)$ continu. De functie

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$$

heet de *homogene* eerste-orde lineaire DV. Zo'n differentiaalvergelijking kan makkelijk opgelost worden. Deel beide kanten van de gelijkheid door y en herschrijf tot

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = -a(t)$$

En we weten dat

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} \equiv \frac{d}{dt} \ln |y(t)|$$

en dus geldt

$$\ln |y(t)| = - \int a(t) dt + c_1$$

Omdat $\left| y(t)e^{\int a(t) dt} \right|$ een continue functie is, geldt

$$y(t) = ce^{-\int a(t) dt},$$

en dit is de algemene oplossing van de homogene vergelijking.

Nu willen we een oplossing vinden voor de *niet-homogene vergelijking*

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t).$$

Hiervoor vermenigvuldigen we links en rechts met de integrerende factor $\mu(t)$ (waarvoor geldt $\mu(t)(dy/dt) + a(t)y\mu(t)$ de afgeleide is van een simpele uitdrukking), omdat $dy/dt + a(t)y$ niet de afgeleide lijkt te zijn van een functie. We weten dat

$$\frac{d\mu(t)y}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y$$

En $\mu(t)(dy/dt) + a(t)\mu(t)y$ is gelijk aan de afgeleide van $\mu(t)y$ dan en slechts dan als $d\mu(t)/dt = a(t)\mu(t)$. En dit is een eerste-orde lineaire DV, dus die kunnen we oplossen:

$$\mu(t) = e^{\int a(t) dt}$$

en hierdoor wordt de niet-homogene vergelijking

$$\frac{d}{dt}\mu(t)y = \mu(t)b(t)$$

en de oplossing is dus

$$y = e^{-\int a(t) dt} \left(\int \mu(t)b(t) dt + c \right)$$

1.2 Separabele vergelijkingen

Een separabele vergelijking heeft de vorm

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$$

met f en g continu. Om deze vergelijking op te lossen, vermenigvuldigen we met $f(y)$ en schrijven we hem tot

$$\frac{d}{dt}F(y(t)) = g(t) \Rightarrow F(y(t)) = \int g(t)dt + c$$

en we lossen deze vergelijking op voor $y(t)$.

1.3 Exacte vergelijkingen

We kunnen tot nu toe alleen differentiaalvergelijkingen oplossen die van de vorm

$$\frac{d}{dt}\phi(t, y) = 0$$

zijn, voor een of andere functie $\phi(t, y)$.

Stelling 1 *Zijn $M(t, y)$ en $N(t, y)$ continu en laat ze continue partiële afgeleiden hebben in de rechthoek R , gevormd door t en y waarvoor geldt $a < t < b$ en $c < y < d$. Er bestaat een functie $\phi(t, y)$ zodat $M(t, y) = \partial\phi/\partial t$ en $N(t, y) = \partial\phi/\partial y$ dan en slechts dan als*

$$\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$$

in R

Definitie 1 *De differentiaalvergelijking*

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0$$

heet **exact** wanneer $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$.

Er zijn drie verschillende methodes om $\phi(t, y)$ te verkrijgen:

Methode 1: We weten dat $M(t, y) = \partial\phi/\partial t$ de functie $\phi(t, y)$ vastlegt op een functie van y na,

$$\phi(t, y) = \int M(t, y)dt + h(y)$$

Nu kun je $h(y)$ bepalen door

$$h'(y) = N(t, y) - \int \frac{\partial M(t, y)}{\partial y}dt$$

te schrijven.

Methode 2: Als $N(t, y) = \partial\phi/\partial y$, dan

$$\phi(t, y) = \int N(t, y)dy + k(t)$$

en omdat

$$M(t, y) = \partial\phi/\partial t = \int \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} dy + k'(t)$$

zien we dat

$$k'(t) = M(t, y) - \int \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} dy$$

Methode 3: De vergelijkingen $\partial\phi/\partial t = M(t, y)$ en $\partial\phi/\partial y = N(t, y)$ impliceren

$$\phi(t, y) = \int M(t, y) dt + h(y) \quad \text{en} \quad \phi(t, y) = \int N(t, y) dy + k(t)$$

waarbij je $h(y)$ en $k(t)$ kunt bepalen door inspectie.

Stel nu dat je een differentiaalvergelijking hebt die niet exact is. Die kun je dan niet oplossen met bovengenoemde drie methodes. Je wil dan een functie μ vinden zodat de equivalente differentiaalvergelijking

$$\mu(t, y)M(t, y) + \mu(t, y)N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0$$

exact is. De voorwaarde voor het exact-zijn van deze vergelijking is

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(t, y)M(t, y)) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu(t, y)N(t, y))$$

Als μ nu alleen een functie van t is, kunnen we dit omschrijven naar

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)}{N}\mu$$

waarbij $\frac{(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t})}{N}$ een functie van t moet zijn, zeg $R(t)$. Als dit het geval is, dan is $\mu(t) = e^{\int R(t) dt}$ een integrerende factor voor de differentiaalvergelijking. Een zelfde soort geval ontstaat als μ alleen een functie van y is.

1.4 Existentie-uniciteitsstelling en Picarditeratie

Wanneer je een initial-value problem als

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

tegenkomt, heb je kans dat je die niet expliciet op kunt lossen. Hoe weten we nu of de vergelijking één, meerdere of geen oplossingen heeft? Het volgende algoritme bewijst dat het initial-value probleem een oplossing heeft

1. Bouw een reeks functies $y_n(t)$ die steeds dichterbij de oplossing van het probleem naderen
2. Laat zien dat die reeks een limiet $y(t)$ heeft op een interval $t_0 \leq t \leq t_0 + a$.
3. Bewijs dat $y(t)$ een oplossing van het probleem is op dat interval.

(1): **Constructie van een benaderende reeks y_n :** Je kunt het makkelijkste een reeks vinden door het probleem te schrijven in de speciale vorm $y(t) = L(t, y(t))$. $L(t, y(t))$ is een 'machine' die voor een gegeven $y(t)$ een nieuwe functie geeft.

Je kunt deze speciale vorm vinden door eerst beide kanten van je probleem te integreren:

$$\int_{t_0}^t \frac{dy(s)}{ds} ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \Rightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

dan is y in de speciale vorm wanneer

$$L(t, y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

We beginnen door een oplossing $y_0(t)$ te verzinnen. Om te kijken wanneer $y_0(t)$ een oplossing is van de integraalvergelijking, berekenen we

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds$$

Als $y_1(t) = y_0$, dan is $y(t) = y_0$ een oplossing. Zo niet, dan verzinnen we een oplossing voor $y_1(t)$ op dezelfde manier als voor $y_0(t)$. Hierdoor verkrijgen we een reeks functies $y_1(t), y_2(t), \dots$ met

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds$$

Deze functies heten Picarditeraties. Deze iteraties convergeren altijd naar een oplossing $y(t)$ op een passend interval.

(2): **Convergentie van Picarditeraties:** Omdat de oplossingen van niet-lineaire DV's niet voor alle t bestaan, kunnen we er ook niet vanuit gaan dat de Picarditeraties naar een oplossing convergeren voor alle t . Om te bepalen waar de Picarditeraties wel convergeren willen we een interval vinden waarin de $y_n(t)$ uniform begrensd zijn.

Lemma 1 *Kies twee positieve integers a en b en zij R de rechthoek: $t_0 \leq t \leq t_0 + a, |y - y_0| \leq b$. Bereken*

$$M = \max_{(t,y) \in R} |f(t, y)| \text{ en zet } \alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$$

Dan is

$$|y_n(t) - y_0| \leq M(t - t_0) \text{ voor } t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha.$$

De Picarditeraties convergeren voor alle t in het interval $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ wanneer $\partial f / \partial y$ bestaat en continu is (het bewijs hiervan staat in Braun p. 72-74).

(3): **Bewijs dat $y(t)$ aan het initial-value problem voldoet:** Zie Braun. De volgende stelling vat het resultaat samen:

Stelling 2 *Zij f en $\partial f/\partial y$ continu in de rechthoek $R : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |y - y_0| \leq b$. Bereken*

$$M = \max_{(t,y) \text{ in } R} |f(t,y)| \text{ en zet } \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

Het beginwaardeprobleem $y' = f(t,y), y(t_0) = y_0$ heeft een unieke oplossing $y(t)$ op het interval $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.

2 Tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking

2.1 Algebraïsche eigenschappen van oplossingen

Een tweede-orde differentiaalvergelijking is van de vorm

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right),$$

en deze zijn heel moeilijk op te lossen. We kunnen ze alleen oplossen als ze van de vorm

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

zijn (lineaire tweede-orde differentiaalvergelijking).

Stelling 3 *Existentie-uniceitstelling* *Zij $p(t)$ en $q(t)$ continu op $\alpha < t < \beta$. Dan bestaat er één functie $y(t)$ die voldoet aan*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \quad (2)$$

op het interval $\alpha < t < \beta$ en beginvoorwaarden $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0$. (een oplossing van de DV die voldoet aan $y(t_0) = 0$ en $y'(t_0) = 0$ is zelf de nulfunctie).

Om de differentiaalvergelijking op te lossen, merken we op dat de linkerkant van de vergelijking te schrijven is als

$$L[y](t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t),$$

een ‘functie van een functie’: Als je hier een functie $y = f(t)$ inplukt, komt er een nieuwe functie uit: $L[f(t)](t)$. Deze operator L is een *lineaire operator*. Hierdoor kunnen we inzien dat alle lineaire combinaties van oplossingen van (2) zelf weer een oplossing zijn van (2).

Stelling 4 *Laat $y_1(t)$ en $y_2(t)$ twee oplossingen zijn van (2) op $\alpha < t < \beta$, met*

$$y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0$$

op dat interval, dan is

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

de algemene oplossing van (2).

$y_1(t)$ en $y_2(t)$ heten een *fundamentele verzameling oplossingen*.

Definitie 2 $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ heet de **Wronskiaan** van y_1 en y_2 , en wordt genoteerd als $W(t) = W[y_1, y_2](t)$.

Stelling 5 Zij $p(t)$ en $q(t)$ continu op het interval $\alpha < t < \beta$ en zij $y_1(t)$ en $y_2(t)$ twee oplossingen van (2). Dan is de Wronskiaan van y_1 en y_2 óf de nulfunctie, óf nooit gelijk aan 0 op het interval $\alpha < t < \beta$.

Lemma 2 Zij $y_1(t)$ en $y_2(t)$ twee oplossingen van (2). Dan voldoet hun Wronskiaan aan de differentiaalvergelijking $W' + p(t)W = 0$.

Stelling 6 Zij $y_1(t)$ en $y_2(t)$ twee oplossingen van (2) op het interval $\alpha < t < \beta$, en zij $W[y_1, y_2](t_0) = 0$ voor $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Dan is één van deze oplossingen een scalair veelvoud van de andere.

Definitie 3 De functies y_1 en y_2 heten **lineair afhankelijk** op het interval I als één van deze functies een scalair veelvoud is van de andere op het interval I . En dus ook: y_1 en y_2 heten **lineair onafhankelijk** als hun Wronskiaan ongelijk aan 0 is op het interval I .

2.2 Lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten

Beschouw de homogene lineaire tweede-orde differentiaalvergelijking

$$L[y] = a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0 \quad (3)$$

met a, b, c constant en $a \neq 0$. We hoeven, zoals we in de vorige paragraaf zagen, slechts twee oplossingen te vinden om de algemene oplossing van deze DV te vinden. Merk hiervoor op dat de termen ay'' , by' en cy elkaar moeten ‘opheffen’, willen we de DV gelijk aan 0 krijgen. Kies dus $y = e^{rt}$. Dit is alleen een oplossing van (3) als $ar^2 + br + c = 0$ (dit heet de *karacteristieke vergelijking* van (3)). Als

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ en } r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

verschillend en reëel zijn, zijn $y_1 = e^{r_1 t}$ en $y_2 = e^{r_2 t}$ twee verschillende oplossingen van (3).

Merk op: $e^{r(t-t_0)}$ is ook een oplossing van de DV.

2.2.1 Complexe nulpunten van de karakteristieke vergelijking

Lemma 3 Zij $y(t) = u(t) + iv(t)$ een complexe oplossing van (3), met $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dan zijn $y_1(t) = u(t)$ en $y_2(t) = v(t)$ twee reële oplossingen van (3).

2.2.2 Gelijke nulpunten van de karakteristieke vergelijking; ordereductie

Stel dat we twee gelijke nulpunten van de karakteristieke vergelijking $ar^2 + br + c = 0$ hebben: $r_1 = r_2 = -b/2a$. Dan verkrijgen we slechts één oplossing $y_1(t) = e^{-bt/2a}$ en kunnen we Stelling 4 niet toepassen.

Neem eerst aan dat je differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = 0$$

is.

We kunnen het probleem reduceren naar het oplossen van een eerste-orde lineaire vergelijking (*ordereductie*), omdat we al een oplossing hebben. Hiervoor schrijven we $y(t) = y_1(t)v(t)$. Dan ook $y'(t) = vy'_1 + y_1v'$ en $y''(t) = vy''_1 + 2v'y'_1 + y_1v''$. Dus

$$L[y] = y_1v'' + (2y'_1 + p(t)y_1)v'$$

en hieruit volgt dan

$$v' = \frac{ce^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)}$$

We kiezen $c = 1$ (we hebben maar één oplossing nodig) en integreren geeft

$$u(t) = \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)}$$

dus $y_2 = vy_1 = y_1 \int u(t)dt$ is een tweede oplossing van de vergelijking.

Nu lossen we het probleem van gelijke nulpunten op voor de algemene vorm van de homogene tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$$

Als je twee gelijke oplossingen hebt, vind je dus als enige oplossing $y_1(t) = e^{-bt/2a}$. Hiervoor maken we eerst de homogene differentiaalvergelijking monisch:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{a} \frac{dy}{dt} + \frac{c}{a} y = 0 \quad (4)$$

en we krijgen dus

$$u(t) = \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dt}}{(e^{-bt/2a})^2}$$

en $y_2 = y_1 \int dt = ty_1$.

2.3 Niet-homogene vergelijkingen

Nu beschouwen we de niet-homogene vergelijking

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

Stelling 7 Zij $y_1(t)$ en $y_2(t)$ twee lineair onafhankelijke oplossingen van

$$L[y] = \frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = 0$$

en zij $\psi(t)$ een particuliere oplossing van de niet-homogene vergelijking (1). Dan is elke oplossing $y(t)$ van (1) van de vorm

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \psi(t)$$

met c_1, c_2 constant.

Lemma 4 *Het verschil van twee oplossingen van de niet-homogene vergelijking (1) is een oplossing van de homogene vergelijking.*

2.4 Variatie van parameters

Een manier om een particuliere oplossing te vinden (wanneer de oplossing van de homogene vergelijking bekend is) is met behulp van variatie van parameters. Zij y_1 en y_2 twee lineair onafhankelijke oplossingen van de homogene vergelijking. We proberen een particuliere oplossing $\psi(t)$ te vinden van de vorm

$$\psi(t) = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

We berekenen

$$\frac{d\psi}{dt} = u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_1' y_1 + u_2' y_2$$

en zien dat $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ en dus $L[\psi]$ geen tweede-orde afgeleiden van u_1 en u_2 bevat wanneer $y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$. Als dit klopt, dan is

$$L[\psi] = u_1' y_1' + u_2' y_2'$$

Hieruit volgt uiteindelijk

$$u_1' = -\frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1 y_2](t)} \quad \text{en} \quad u_2' = \frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1 y_2](t)}$$

En deze vergelijkingen integreren geeft je de particuliere oplossing van je tweede-orde differentiaalvergelijking.

2.5 Methode van verstandig kiezen

Een nadeel van de methode van variatie van parameters is dat het integreren vaak niet eenvoudig is.

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$L[y] = a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

We zoeken een functie $\psi(t)$ zodat $a\psi''$, $b\psi'$ en $c\psi$ optellen tot een gegeven polynoom van graad n . Kies dus $\psi(t) = A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n$ en bereken

$$L[\psi](t) = a\psi''(t) + b\psi'(t) + c\psi(t) = cA_n t^n + (cA_{n-1} + nbA_n)t^{n-1} + \dots + (cA_0 + bA_1 + 2aA_2)$$

Echter, als $c = 0$ dan is $L[\psi]$ van graad $n - 1$. We kunnen deze onvolkomenheid corrigeren door $\psi = t[A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n]$ te kiezen.

Als $c = b = 0$ schrijf je $\psi = t^2[A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n]$.

Lemma 5 *Zij $y(t) = u(t) + iv(t)$ een complexe oplossing van de vergelijking*

$$L[y] = a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$$

met $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dan is $L[u](t) = g_1(t)$ en $L[v](t) = g_2(t)$

2.6 Reeksooplossingen

We keren terug naar de algemene homogene lineaire tweede-orde differentiaalvergelijking

$$L[y] = P(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + Q(t) \frac{dy}{dt} + R(t)y = 0.$$

met $P(t) \neq 0$. Om de oplossing te vinden schrijven we y als machtreeks.

Het interval van convergentie kun je berekenen door de Cauchy Ratiotest toe te passen: Stel $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$, dan convergeert de machtreeks voor $|t| < 1/\lambda$ en deze divergeert voor $|t| > 1/\lambda$. $1/\lambda$ heet de *straal van convergentie*. Verder heet een functie die te schrijven is als machtreeks *analytisch* (heel veel functies zijn analytisch: alle polynomen, goniometrische functies, exponentiële, logaritmische en machtsfuncties zijn analytisch).

Stelling 8 *Zij t een variabele die complexe waarde aanneemt, en z_0 het punt die het dichtst bij t_0 ligt zodat f of één van zijn afgeleiden niet bestaat. Dan bestaat ρ , de afstand tussen t_0 en z_0 (in het complexe vlak), zodat de Taylorreeks van f om t_0 convergeert voor $|t - t_0| < \rho$ en divergeert voor $|t - t_0| > \rho$.*

In het algemeen zijn $P(t)$, $Q(t)$ en $R(t)$ polynomen, maar het is ook mogelijk dat het zelf machtreeksen zijn.

Stelling 9 *Neem aan dat $Q(t)/P(t)$ en $R(t)/P(t)$ convergente Taylorreeksen hebben om $t = t_0$ met $|t - t_0| < \rho$. Dan is elke oplossing $y(t)$ van de vergelijking*

$$P(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + Q(t) \frac{dy}{dt} + R(t)y = 0$$

analytisch in $t = t_0$, en de straal van convergentie van zijn Taylorreeks is tenminste ρ . De coëfficiënten van de Taylorreeks

$$y(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots$$

kunnen bepaald worden door deze reeks in de differentiaalvergelijking te pluggen en de som van de coëfficiënten van gelijke machten gelijk aan 0 te stellen.

2.6.1 Singuliere punten; Eulervergelijkingen

De differentiaalvergelijking

$$L[y] = P(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + Q(t) \frac{dy}{dt} + R(t)y = 0$$

heet *singulier* in $t = t_0$ als $P(t_0) = 0$.

Definitie 4 *De differentiaalvergelijking*

$$L[y] = t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha t \frac{dy}{dt} + \beta y = 0$$

*met α, β constant heet de **Eulervergelijking**.*

We lossen deze vergelijking als volgt op:
 Neem allereerst aan dat $t > 0$. Merk op dat $t^2 y''$ en ty' beide veelvouden van t^r zijn als $y = t^r$. We kiezen dus $y = t^r$ en hieruit volgt

$$L[t^r] = (r^2 + (\alpha - 1)r + \beta)t^r$$

$y = t^r$ is dus alleen een oplossing als er een r bestaat zodat $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$.
 Dus

$$r_1 = -1/2 \left((\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta} \right) \quad \text{en} \quad r_2 = -1/2 \left((\alpha - 1) - \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta} \right)$$

We onderzoeken apart de gevallen waar $(\alpha - 1)^2 - 4\beta$ positief, negatief en gelijk aan nul is.

(1): $(\alpha - 1)^2 - 4\beta > 0$: De algemene oplossing is $y(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}$ want $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$ heeft twee verschillende oplossingen van de vorm $y_1 = t^{r_1}, y_2 = t^{r_2}$.

(2): $(\alpha - 1)^2 - 4\beta = 0$: Hier is $r_1 = r_2 = \frac{1-\alpha}{2}$. Een tweede oplossing kan gevonden worden met behulp van orderreductie. De algemene oplossing wordt dan $y(t) = (c_1 + c_2 \ln(t))t^r$.

(3): $(\alpha - 1)^2 - 4\beta < 0$: In dit geval is $r_1 = \lambda + i\mu$ en $r_2 = \lambda - i\mu$ waarbij $\lambda = \frac{1-\alpha}{2}$ en $\mu = \frac{\sqrt{4\beta - (\alpha-1)^2}}{2}$. Met behulp van Lemma 3 vinden we uiteindelijk $y(t) = t^\lambda (c_1 \cos(\mu \ln(t)) + c_2 \sin(\mu \ln(t)))$.

Als $t < 0$ krijg je dezelfde oplossingen, maar dan met $t = |t|$.

Merk op dat de vergelijking

$$(t - t_0)^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha(t - t_0) \frac{dy}{dt} + \beta y = 0$$

ook een Eulervergelijking is. In dit geval zoeken we oplossingen van de vorm $(t - t_0)^r$.

2.6.2 Reguliere singuliere punten; de methode van Frobenius

Definitie 5 *De vergelijking*

$$L[y] = \frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \quad (5)$$

heeft een **regulier singulier punt** in $t = 0$ als $p(t)$ en $q(t)$ reeksontwikkelingen hebben van de vorm

$$p(t) = \frac{p_0}{t} + p_1 + p_2 t + \dots, \quad q(t) = \frac{q_0}{t^2} + \frac{q_1}{t} + q_2 t + \dots$$

Equivalent: $t = 0$ is een **regulier singulier punt** van $L[y]$ als $tp(t)$ en $t^2 q(t)$ analytisch zijn in $t = 0$.

Stelling 10 *Beschouw de differentiaalvergelijking (5) waar $t = 0$ een regulier singulier punt is. Dan zijn de functies $tp(t)$ en $t^2 q(t)$ analytisch in $t = 0$ met machtreeksontwikkelingen*

$$tp(t) = p_0 + p_1 t + \dots \quad t^2 q(t) = q_0 + q_1 t + \dots$$

die convergeren voor $|t| < \rho$. Zij r_1 en r_2 de twee nulpunten van de indicieële vergelijking

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$$

met $r_1 \geq r_2$ als $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Dan heeft (5) twee lineair onafhankelijke oplossingen y_1 en y_2 op het interval $0 < t < \rho$ van de volgende vorm:

(a): Als $r_1 - r_2 < 0$, dan

$$y_1(t) = t^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad y_2(t) = t^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

(b): Als $r_1 = r_2$, dan

$$y_1(t) = t^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad y_2(t) = y_1 \ln(t) + t^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

(c): Als $r_1 - r_2 = N, N \in \mathbb{N}$, dan

$$y_1(t) = t^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad y_2(t) = a y_1 \ln(t) + t^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Methode van Frobenius:

Stel dat we een differentiaalvergelijking van de vorm

$$L[y] = \frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = 0$$

hebben. Vermenigvuldigen met t^2 geeft

$$L[y] = t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t(tp(t)) \frac{dy}{dt} + t^2 q(t)y = 0$$

En $p(t)$ en $q(t)$ uitschrijven geeft

$$L[y] = t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t[p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots] \frac{dy}{dt} + [q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots] y = 0$$

Vul nu $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$, $y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1}$, $y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-2}$ in, zodat

$$L[y] = t^r \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^n + \left(\sum_{m=0}^{\infty} p_m t^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^n \right) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} q_m t^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \right\}$$

en als we nu $F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0$ substitueren en alle coëfficiënten gelijk aan 0 stellen vinden we

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0 = 0 \quad \text{en} \quad F(n+r) a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}] a_k$$

en als de linker vergelijking twee verschillende reële nulpunten heeft met $r_1 > r_2$ en $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$, dan heeft de differentiaalvergelijking twee oplossingen van de vorm

$$y_1(t) = t^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) t^n, \quad y_2(t) = t^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) t^n$$

en deze oplossingen convergeren op het interval waar zowel $tp(t)$ als $t^2q(t)$ convergeren.

Als de linker vergelijking twee dezelfde nulpunten heeft, zijn de oplossingen van de differentiaalvergelijking van de vorm

$$y_1(t) = t^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad y_2(t) = y_1 \ln(t) + t^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Als de linker vergelijking nulpunten heeft met $r_1 = r_2 + m, m \in \mathbb{N}$, dan zijn de oplossingen van de differentiaalvergelijking van de vorm

$$y_1(t) = t^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad y_2(t) = y_1 \ln(t) + t^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

2.6.3 Gelijke nulpunten en nulpunten die een geheel getal verschillen

Als de indiciele vergelijking dubbele nulpunten heeft, heeft de differentiaalvergelijking

$$P(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + Q(t) \frac{dy}{dt} + R(t)y = 0$$

maar één oplossing van de vorm $y(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Om een tweede oplossing te vinden gebruiken we een methode die sterk lijkt op de methode die we gebruikten bij de Eulervergelijkingen:

Schrijf $y(t)$ om naar

$$y(t, r) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) t^n$$

Volgens eenzelfde procedure als bij de Eulervergelijkingen kom je uiteindelijk op

$$y_2(t) = y_1(t) \ln(t) + \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(r_1) t^{n+r_1}$$

Als we twee oplossingen hebben die een geheel getal verschillen, is het mogelijk dat we geen tweede oplossing kunnen vinden. In dit geval heeft de differentiaalvergelijking een tweede oplossing van de vorm

$$y_2(t) = ay_1(t) \ln(t) + \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(r_2) t^{n+r_1}$$

2.7 Laplacetransformaties

Een slimme manier om beginwaardeproblemen van de vorm

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

(a,b,c constant) op te lossen is met behulp van Laplacetransformaties. Het is vooral handig wanneer $f(t)$ discontinu is of wanneer $f(t)$ op een groot interval gelijk aan 0 is en op een klein interval hoge waarden aanneemt.

Definitie 6 Laat $f(t)$ gedefinieerd zijn voor $0 \leq t < \infty$. De **Laplacetransformatie** van $f(t)$, die genoteerd wordt als $F(s)$ of $\mathcal{L}(f(t))$, wordt gegeven door

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt$$

Lemma 6 Als $f(t)$ stuksgewijs continu is en van een exponentiële orde, dan bestaat zijn Laplacetransformatie voor alle s voldoende groot. Specifieker: Als $f(t)$ stuksgewijs continu is, en $|f(t)| \leq Me^{ct}$, dan bestaat $F(s)$ voor $s > c$.

Lemma 7 Laat $g(t)$ stuksgewijs continu zijn. Dan bestaat de *onbegrensde* integraal $\int_0^\infty g(t) dt$ als $\int_0^\infty |g(t)| dt$ bestaat.

2.8 Enkele bruikbare eigenschappen van Laplacetransformaties

Eigenschap 1 Als $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, dan is

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = \frac{d}{ds} F(s)$$

Eigenschap 2 Als $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, dan is

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s - a)$$

2.9 De eliminatiemethode voor stelsels

De theorie van tweede-orde lineaire differentiaalvergelijkingen kan ook gebruikt worden voor het tegelijk oplossen van twee eerste-orde vergelijkingen van de vorm

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x + b(t)y + f(t) \\ y' &= c(t)x + d(t)y + g(t) \end{aligned}$$

Het idee is om één van de variabelen te elimineren, en dan de andere variabele te vinden als de oplossing van een tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking door middel van substitutie [zie voorbeelden uit het boek, blz 257].

2.10 Hogere-orde vergelijkingen

Definitie 7 De vergelijking

$$L[y] = a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t)y = 0, \quad a_n(t) \neq 0 \quad (6)$$

heet de **algemene n -de orde homogene lineaire differentiaalvergelijking**.

Stelling 11 Laat $y_1(t), \dots, y_n(t)$ n lineair onafhankelijke oplossingen zijn van (6). Dan is iedere oplossing $y(t)$ van de vorm

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$$

voor $c_1, \dots, c_n$ constant.

Om n onafhankelijke oplossingen van (6) te vinden als de coëfficiënten niet afhankelijk zijn van t lossen we

$$L[e^{rt}] = (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0) e^{rt}$$

op. Hieruit volgt dat e^{rt} alleen een oplossing van (6) is wanneer r een nulpunt van de karakteristieke vergelijking

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

is. Als de karakteristieke vergelijking n verschillende oplossingen heeft is de algemene oplossing van (6)

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + \dots + c_n e^{r_n t}$$

Als $r_j = \alpha_j + i\beta_j$ een complex nulpunt van de karakteristieke vergelijking is, dan zijn

$$u(t) = e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t) \quad \text{en} \quad v(t) = e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t)$$

twee oplossingen van (6).

Tenslotte: Als r_1 een nulpunt van de karakteristieke vergelijking met multipliciteit k is, dus als $a_n r^n + \dots + a_0 = (r - r_1)^k q(r)$ met $q(r) \neq 0$, dan zijn $e^{r_1 t}, t e^{r_1 t}, \dots, t^{k-1} e^{r_1 t}$ k onafhankelijke oplossingen van (6).

Beschouw de niet-homogene n -de orde lineaire differentiaalvergelijking

$$L[y] = a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) y = f(t), \quad a_n(t) \neq 0 \quad (7)$$

Lemma 8 *Het verschil van twee oplossingen van de niet-homogene vergelijking (7) is een oplossing van de homogene vergelijking (6)*

Stelling 12 *Zij $\psi(t)$ een particuliere oplossing van de niet-homogene vergelijking (7), en zijn $y_1(t), \dots, y_n(t)$ n lineair onafhankelijke oplossingen van de homogene vergelijking (6). Dan is iedere oplossing van (7) van de vorm*

$$y(t) = \psi(t) + c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$$

voor constanten $c_1, \dots, c_n$.

De methode van verstandig kiezen is ook hier bruikbaar om een particuliere oplossing te vinden.

3 Stelsels differentiaalvergelijkingen

3.1 Algebraïsche eigenschappen van oplossingen van lineaire stelsels

We beschouwen eerste-orde differentiaalvergelijkingen in meerdere variabelen tegelijk: vergelijkingen van de vorm

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{1}$$

oftewel: een stelsel van n eerste-orde differentiaalvergelijkingen. Dit kan ook geschreven worden als

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad (2)$$

(hier staan in het boek allemaal dingen die we allang weten...)

Stelling 13 *Laat $\mathbf{x}(t)$ en $\mathbf{y}(t)$ twee oplossingen van (2) zijn. Dan is $c\mathbf{x}(t)$ een oplossing van (2) voor een willekeurige constante c en $\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)$ weer een oplossing van (2).*

Lemma 9 *Zij $\mathbf{A}$ een $n \times n$ -matrix. Voor ieder paar vectoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ en een constante c geldt $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{Ax}$ en $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay}$.*

3.2 Toepassingen van Lineaire Algebra op differentiaalvergelijkingen

Stelling 14 (*Existentie-uniciteitsstelling voor stelsels*) *Er bestaat één en slechts één oplossing van het beginwaardenprobleem*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

en deze oplossing bestaat voor $-\infty < t < \infty$.

Stelling 15 *De dimensie van de vectorruimte $\mathbf{V}$ van alle oplossingen van het homogene lineaire stelsel van differentiaalvergelijkingen (1) is n .*

Met deze stelling hoeven we dus alleen maar n lineair onafhankelijke oplossingen van (1) te vinden om de algemene oplossing te vinden. Hiervoor gebruiken we de volgende stelling:

Stelling 16 (*Test voor lineaire onafhankelijkheid*) *Laat $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$ k oplossingen van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ zijn. Kies een t_0 handig. Dan zijn $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n$ lineair onafhankelijke oplossingen dan en slechts dan als $\mathbf{x}^1(t_0), \dots, \mathbf{x}^n(t_0)$ lineair onafhankelijk zijn in $\mathbb{R}^n$.*

3.3 De eigenwaarde-eigenvectormethode om oplossingen te vinden

Breng in herinnering dat eerste-orde en tweede-orde lineaire homogene scalaire vergelijkingen altijd exponentiële functies als oplossing hebben. $\mathbf{x} = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ proberen geeft dat $\mathbf{x}$ een oplossing is van (1) dan en slechts dan als $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, dus als λ een eigenwaarde is.

Stelling 17 *Elke set van k eigenvectoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ van $\mathbf{A}$ met verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ zijn lineair onafhankelijk.*

3.4 Complexe nulpunten

Als $\lambda = \alpha + i\beta$ een complexe eigenwaarde van $\mathbf{A}$ is met eigenvector $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2$, is $\mathbf{x} = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ een complexe oplossing van de differentiaalvergelijking $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Lemma 10 *Zij $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + i\mathbf{z}(t)$ een complexe oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Dan zijn zowel $\mathbf{y}(t)$ als $\mathbf{z}(t)$ reële oplossingen van deze differentiaalvergelijking.*

Opmerking: Als $\mathbf{v}$ een eigenvector is van $\mathbf{A}$ met eigenwaarde λ , dan is $\bar{\mathbf{v}}$ een eigenvector van $\mathbf{A}$ met eigenwaarde $\bar{\lambda}$.

3.5 Meervoudige nulpunten

Als het karakteristiek polynoom van $\mathbf{A}$ geen n verschillende nulpunten heeft, heeft $\mathbf{A}$ soms geen n lineair onafhankelijke eigenvectoren. Om dit probleem op te lossen, moeten we in herinnering brengen dat $x(t) = e^{at}c$ een oplossing is van de scalaire differentiaalvergelijking $\dot{x} = ax$. We willen dus proberen of $\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}$ een oplossing is van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Hiervoor schrijven we

$$e^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \dots$$

Nu kunnen we een algoritme gebruiken om alle n lineair onafhankelijke oplossingen van (1) te vinden:

1. Vind alle eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathbf{A}$. Als $\mathbf{A}$ n lineair onafhankelijke eigenvectoren heeft, dan heeft (1) n lineair onafhankelijke oplossingen van de vorm $e^{\lambda t} \mathbf{v}$.
2. Als $\mathbf{A}$ $k < n$ lineair onafhankelijke eigenvectoren heeft, hebben we maar k lineair onafhankelijke oplossingen van de vorm $e^{\lambda t} \mathbf{v}$. Om meer oplossingen te vinden kiezen we een eigenwaarde λ van $\mathbf{A}$ en vinden alle vectoren $\mathbf{v}$ zodat $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$, maar $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2 \mathbf{v} \neq 0$. Voor zo'n vector is $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}$ een nieuwe oplossing van (1). Herhaal dit voor alle eigenwaarden λ van $\mathbf{A}$.
3. Als we nog steeds niet genoeg lineair onafhankelijke oplossingen hebben, zoeken we vectoren $\mathbf{v}$ bij een eigenwaarde λ van $\mathbf{A}$ zodat $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3 \mathbf{v} = 0$, maar $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2 \mathbf{v} \neq 0$. Voor zo'n vector is $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}$ een nieuwe oplossing van (1).
4. Herhaal hetzelfde proces met steeds een hogere macht van $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ totdat je n lineair onafhankelijke oplossingen van (1) hebt

Dit vatten we samen in het volgende lemma:

Lemma 11 *Neem aan dat het karakteristiek polynoom van $\mathbf{A}$ k verschillende nulpunten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ heeft met multipliciteit resp. $n_1, \dots, n_k$. Neem aan dat $\mathbf{A}$ maar $v_j < n_j$ lineair onafhankelijke eigenvectoren met eigenwaarde λ_j heeft. Dan heeft de vergelijking $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$ tenminste $v_j + 1$ onafhankelijke oplossingen. Algemener: Als de vergelijking $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^m \mathbf{v} = \mathbf{0}$ maar $m_j < n_j$ onafhankelijke oplossingen heeft, dan heeft de vergelijking $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{m+1} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ tenminste $m_j + 1$ onafhankelijke oplossingen.*

Stelling 18 (Cayley-Hamilton) *Zij $p(\lambda) = p_0 + p_1 \lambda + \dots + (-1)^n \lambda^n$ het karakteristiek polynoom van de matrix $\mathbf{A}$. Dan geldt*

$$p(\mathbf{A}) \equiv p_0 \mathbf{I} + p_1 \mathbf{A} + \dots + (-1)^n \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$$

3.6 Fundamentele matrixoplossingen; $e^{\mathbf{A}t}$

Als $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ n onafhankelijke oplossingen zijn van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, dan kan elke oplossing $\mathbf{x}(t)$ geschreven worden als

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}^1(t) + c_2 \mathbf{x}^2(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^n(t) \quad (7).$$

Zij $\mathbf{X}(t)$ de matrix met $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ als kolommen. Dan kan (7) geschreven worden als $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}$, met $\mathbf{c} = (c_1 \dots c_n)^T$.

Definitie 8 *Een matrix $\mathbf{X}(t)$ heet een **fundamentele matrixoplossing** als de kolommen een set van n lineair onafhankelijke oplossingen vormen.*

Stelling 19 *Zij $\mathbf{X}(t)$ een fundamentele matrixoplossing van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Dan is*

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)$$

En $e^{\mathbf{A}t}$ is een fundamentele matrixoplossing van de differentiaalvergelijking.

Lemma 12 *Een matrix $\mathbf{X}(t)$ is een fundamentele matrixoplossing van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dan en slechts dan als $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$ en $\det \mathbf{X}(0) \neq 0$.*

Lemma 13 *Laat $\mathbf{X}(t)$ en $\mathbf{Y}(t)$ twee fundamentele matrixoplossingen van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ zijn. Dan bestaat er een constantenmatrix $\mathbf{C}$ zodat $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$.*

3.7 De niet-homogene vergelijking en de methode van variatie van parameters

Beschouw de niet-homogene differentiaalvergelijking

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \quad (8).$$

We kunnen onze kennis van de homogene vergelijking $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ gebruiken om de oplossingen van (8) te vinden. Met behulp van variatie van parameters vinden we uiteindelijk dat

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)ds$$

4 Kwalitatieve theorie van differentiaalvergelijkingen

4.1 Introductie

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (9)$$

met $\mathbf{x} = (x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t))^T$ en

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

een niet-lineaire functie van $x_1, \dots, x_n$.

Helaas zijn er geen manieren om (9) op te lossen. We kunnen echter wel kwalitatieve uitspraken doen over de oplossingen van deze differentiaalvergelijking. Specifieker willen we de volgende vragen beantwoorden

1. Bestaan er evenwichtswaarden $\mathbf{x}^0$ waarvoor $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$ een oplossing is van (9)?
2. Stel dat $\phi(t)$ een oplossing is van (9). Neem aan dat $\psi(t)$ een tweede oplossing is met $\psi(0)$ heel dichtbij $\phi(0)$. Wat gebeurt er met $\psi(t)$ ten opzichte van $\phi(t)$ wanneer t groter wordt? (stabiliteit van oplossingen)
3. Wat gebeurt er met oplossingen $\mathbf{x}(t)$ van (9) wanneer t naar oneindig gaat?

De eerste vraag kan direct beantwoord worden:

Merk op dat $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ als $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$. $\mathbf{x}^0$ is dus een evenwichtswaarde van (9) dan en slechts dan als $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}^0) \equiv \mathbf{0}$.

4.2 Stabiliteit van lineaire stelsels

Definitie 9 De oplossing $\mathbf{x} = \phi(t)$ van (9) is **stabiel** als voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta = \delta(\varepsilon)$ bestaat zodat

$$|\psi_j(t) - \phi_j(t)| < \varepsilon \text{ als } |\psi_j(0) - \phi_j(0)| < \delta(\varepsilon)$$

voor alle $t > 0$ en voor elke oplossing $\psi(t)$ van (9).

Stelling 20 (a): Elke oplossing $\mathbf{x} = \phi(t)$ van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (10) is stabiel als het reële deel van alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ negatief is.

(b): Elke oplossing $\mathbf{x} = \phi(t)$ van (10) is instabiel als tenminste één eigenwaarde van $\mathbf{A}$ een positief reëel deel heeft.

(c): Als alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ reëel deel ≤ 0 hebben en $\lambda_1 = i\sigma_1, \dots, \lambda_n = i\sigma_n$ een reëel deel gelijk aan 0 hebben. Laat $\lambda_j = i\sigma_j$ multipliciteit k_j hebben. Dit betekent dat het karakteristiek polynoom van $\mathbf{A}$ gefactoriseerd kan worden in de vorm

$$p(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{k_1} \dots (\lambda - i\sigma_l)^{k_l} q(\lambda)$$

waar alle nulpunten van $q(\lambda)$ een negatief reëel deel hebben. Dan is elke oplossing $\mathbf{x} = \phi(t)$ van (9) stabiel als $\mathbf{A}$ k_j lineair onafhankelijke eigenvectoren heeft voor iedere eigenwaarde $\lambda_j = i\sigma_j$. Anders is elke oplossing $\phi(t)$ instabiel.

Definitie 10 Een oplossing $\mathbf{x} = \phi(t)$ van (9) is **asymptotisch stabiel** als hij stabiel is en elke oplossing $\psi(t)$ die dicht genoeg bij $\phi(t)$ begint $\phi(t)$ moet benaderen als $t \rightarrow \infty$. In het bijzonder: een evenwichtswaarde $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0$ van (9) is asymptotisch stabiel als elke oplossing $\mathbf{x} = \psi(t)$ van (9) die dicht genoeg bij $\mathbf{x}^0$ begint niet alleen dicht bij $\mathbf{x}^0$ blijft, maar deze ook benadert als $t \rightarrow \infty$.

4.3 Stabiliteit van evenwichtsoplossingen

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

met $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}) \ g_2(\mathbf{x}) \ \dots \ g_n(\mathbf{x}))^T$ klein vergeleken met $\mathbf{x}$. Specificeer: neem aan dat

$$\frac{g_1(\mathbf{x})}{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}}, \dots, \frac{g_n(\mathbf{x})}{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}}$$

continue functies van $x_1, \dots, x_n$ zijn die verdwijnen als $x_1 = \dots = x_n$.

Stelling 21 (Hartmann-Grobmann) Neem aan dat de vectorfunctie

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})/||\mathbf{x}|| \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x})/\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

een continue functie van $x_1, \dots, x_n$ is die verdwijnt als $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dan

(1): De evenwichtsoplossing $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ van (11) is asymptotisch stabiel als de evenwichtsoplossing $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ van de ‘gelineariseerde’ vergelijking $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ asymptotisch stabiel is. Equivalent: De oplossing $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ van (11) is asymptotisch stabiel als het reële deel van alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ negatief is.

(2): De evenwichtsoplossing $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ is onstabiel als het reële deel van ten minste één eigenwaarde van $\mathbf{A}$ positief is.

(3): De stabiliteit van de evenwichtsoplossing $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ van (11) kan niet bepaald worden van de stabiliteit van de evenwichtsoplossing $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ als het reële deel van alle eigenwaarden van $\mathbf{A} \leq 0$ is maar ten minste één eigenwaarde van $\mathbf{A}$ reëel deel gelijk aan 0 heeft.

Lemma 14 Laat $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ n continue partiële afgeleiden hebben naar zijn variabelen $x_1, \dots, x_n$. Dan kan $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{z})$ worden geschreven in de vorm

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{z})$$

waarbij $\mathbf{g}(\mathbf{z})/\max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}$ een continue functie van $\mathbf{z}$ is die verdwijnt als $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Dit lemma en deze stelling geven ons het volgende algoritme om te bepalen of een evenwichtsoplossing $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$ van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ stabiel of instabiel is:

(1): Schrijf $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$

(2): Schrijf $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{z})$ in de vorm $\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{z})$ waarbij $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ een vectorpolynoom is in $z_1, \dots, z_n$, beginnend met termen van orde twee of meer. (bijvoorbeeld als $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = (z_1 z_2^2 \ z_1 z_2)^T$)

(3): Bereken de eigenwaarden van $\mathbf{A}$. Als het reële deel van alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ negatief is, dan is $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$ asymptotisch stabiel. Als het reële deel van één eigenwaarde van $\mathbf{A}$ positief is, dan is $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$ instabiel.

4.4 Het fasevlak

We proberen alle oplossingen van

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

zo compleet mogelijk te beschrijven. Dat doen we op een geometrische manier. Elke oplossing definieert een curve in de driedimensionale ruimte (t, x, y) , maar ook in de x, y -ruimte. Voor verdere beschrijvingen: zie de voorbeelden in het boek.

4.5 Kwalitatieve eigenschappen van banen

We leiden twee belangrijke eigenschappen af over de oplossingen en banen van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (12)$$

De eerste eigenschap gaat over de existentie en uniciteit van banen, de tweede eigenschap gaat over de existentie van periodieke oplossingen van (12).

Stelling 22 (Existentie en uniciteit voor oplossingen van (12)) *Neem aan dat elk van de functies $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ continue partiële afgeleiden heeft naar $x_1, \dots, x_n$. Dan heeft het beginwaardeprobleem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ één unieke oplossing $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ voor elke $\mathbf{x}^0$ in $\mathbb{R}^n$.*

Lemma 15 *Als $\mathbf{x} = \phi(t)$ een oplossing van (12) is, dan is $\mathbf{x} = \phi(t + c)$ weer een oplossing van (12).*

Eigenschap 3 (Existentie en uniciteit van banen) *Stel dat alle functies $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ continue partiële afgeleiden hebben naar $x_1, \dots, x_n$. Dan bestaat er één unieke baan door elk punt $\mathbf{x}^0$ in $\mathbb{R}^n$. Oftewel: Als de banen van twee oplossingen $\mathbf{x} = \phi(t)$ en $\mathbf{x} = \psi(t)$ van (12) één punt gemeen hebben, moeten ze hetzelfde zijn.*

Eigenschap 4 *Neem aan dat $\mathbf{x} = \phi(t)$ een oplossing van (12) is. Als $\phi(t_0 + T) = \phi(t_0)$ voor één of andere t_0 en $T > 0$, dan is $\phi(t + T)$ gelijk aan $\phi(t)$. In woorden: Als een oplossing $\mathbf{x}(t)$ van (12) na een bepaalde tijd $T > 0$ weer terugkeert naar zijn startwaarde, dan moet deze oplossing periodiek zijn.*

4.6 Faseportretten van lineaire stelsels

We beschouwen de banen van de lineaire differentiaalvergelijking

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (13)$$

Een plaatje van de banen van deze differentiaalvergelijking heet een faseportret. Het uiterlijk van een faseportret is vrijwel volledig afhankelijk van de eigenwaarden van $\mathbf{A}$. We onderscheiden de volgende gevallen:

1. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: zie figuur 3 en uitleg op bladzijde 420. (stabiele knoop)
2. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: Hetzelfde als figuur op bladzijde 420 maar met de pijlen de andere kant op. (instabiele knoop)
3. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: Het faseportret hangt af van of $\mathbf{A}$ één of twee lineair onafhankelijke eigenvectoren heeft. Als de eigenvectoren onafhankelijk zijn, zie figuur 4a. Als de eigenvectoren afhankelijk zijn, ziet het faseportret eruit als figuur 4b.
4. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: Hetzelfde als bij (3), maar nu zijn de pijlen omgedraaid.
5. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: Zie figuur 5 (zadelpunt).
6. $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$: We onderscheiden subgevallen:
 - (a) $\alpha = 0$: Zie figuur 6a. De richting van de pijlen wordt bepaald door het teken van $\dot{x}_2$ wanneer $x_2 = 0$. Als $\dot{x}_2 > 0$, dan wijzen de pijlen tegen de klok in, en als $\dot{x}_2 < 0$, dan wijzen de pijlen met de klok mee. (centrum).
 - (b) $\alpha < 0$: Zie figuur 6b. (inwaartse spiraal) De richting van de pijlen kun je direct afleiden uit de differentiaalvergelijking (13). (stabiel focuspunt)
 - (c) $\alpha > 0$: Zie figuur 6c (uitwaartse spiraal). Alle banen van (13) verwijderen zich van de oorsprong als $t \rightarrow \infty$. (instabiel focuspunt)

Het is lastig om faseportretten te beschrijven zonder plaatjes; het is aan te raden p. 420-425 goed door te lezen.

Stelling 23 *Neem aan dat $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ een knoop, zadel- of focuspunt is van de differentiaalvergelijking $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u}$. Dan heeft het faseportret van de differentiaalvergelijking $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, in de buurt van $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, één van de vormen zoals in figuur 3, 5 en 6(b en c) (p. 420, 423 en 424), afhankelijk van of $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ een knoop, zadel- of focuspunt is.*

4.7 Langetermijngedrag van oplossingen en de Poincaré-Bendixsonstelling

We beschouwen het probleem van het bepalen van het langetermijngedrag van alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (14)$$

In het geval dat $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ kunnen we het probleem oplossen: Alle oplossingen $\mathbf{x}(t)$ van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ moeten zich als één van de volgende vier gevallen gedragen:

1. $\mathbf{x}(t)$ is constant in de tijd.
2. $\mathbf{x}(t)$ is een periodieke functie van de tijd.

3. $\mathbf{x}(t)$ is onbegrensd als $t \rightarrow \infty$
4. $\mathbf{x}(t)$ benadert een evenwichtspunt als $t \rightarrow \infty$.

Lemma 16 *Zij $g(t)$ een monotoon stijgende (dalende) functie van de tijd voor $t \geq t_0$ met $g(t) \leq c$ ($\geq c$) voor één of andere constante c . Dan heeft $g(t)$ een limiet als $t \rightarrow \infty$.*

Lemma 17 *Neem aan dat een oplossing $\mathbf{x}(t)$ van (14) een vector $\boldsymbol{\xi}$ benadert als $t \rightarrow \infty$. Dan is $\boldsymbol{\xi}$ een evenwichtspunt van (14).*

Stelling 24 (Poincaré-Bendixson) *Neem aan dat een oplossing $x = x(t), y = y(t)$ van het stelsel differentiaalvergelijking*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (15)$$

in een begrensd gebied blijft van het vlak dat geen evenwichtspunten van (15) bevat. Dan moet zijn baan naar een simpele gesloten kromme (een kromme die zichzelf niet snijdt en eindigt waar hij begint) getrokken worden, waarbij de gesloten kromme zelf een baan van een periodieke oplossing van (15) is.

4.8 Introductie bifurcatietheorie

Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (16).$$

$\varepsilon = \varepsilon_0$ is een bifurcatiepunt van (16) als de faseportretten van (16) voor $\varepsilon < \varepsilon_0$ en $\varepsilon > \varepsilon_0$ verschillend zijn.