



Samenvatting

Gewone differentiaalvergelijkingen - Collegejaar 2015-2016

Boek: Differential Equations and their Applications, Fourth Edition

Disclaimer

De informatie in dit document is afkomstig van derden. W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' betracht de grootst mogelijke zorgvuldigheid in de samenstelling van de informatie in dit document, maar garandeert niet dat de informatie in dit document compleet en/of accuraat is, noch aanvaardt W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' enige aansprakelijkheid voor directe of indirecte schade welke is ontstaan door gebruikmaking van de informatie in dit document.

De informatie in dit document wordt slechts voor algemene informatie in dit documentdoeleinden aan bezoekers beschikbaar gesteld. Elk besluit om gebruik te maken van de informatie in dit document is een zelfstandig besluit van de lezer en behoort uitsluitend tot zijn eigen verantwoordelijkheid.

Chapter 1: First-order differential equations

1.2: First-order linear differential equations

Definitie: De algemene eerste orde differentiaalvergelijking is:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

Definitie: De vergelijking

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$$

Heet een homogene eerste orde differentiaalvergelijking. De oplossing hiervan is gelijk aan

$$y(t) = ce^{-\int a(t) dt}$$

We hebben vaak dat er een beginwaarde wordt gegeven, dus $y(t_0) = y_0$. We zien dat de oplossing dan gelijk is aan

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

Voor niet-homogene eerste orde differentiaalvergelijkingen zullen we een integrerende factor gebruiken. Deze definiëren we als

$$\mu(t) = e^{\int a(t) dt}$$

Zodat we onze differentiaalvergelijking kunnen schrijven als

$$\frac{d}{dt} \mu(t)y = \mu(t)b(t)$$

Er volgt dat de oplossing gelijk is aan

$$y(t) = e^{-\int a(t) dt} \left(\int \mu(t)b(t) dt + c \right)$$

En met een beginwaarde $y(t_0) = y_0$

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\mu(t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \mu(s)b(s) ds \right)$$

De laatste twee vergelijkingen hoeft je niet uit je hoofd te kennen, meestal moet je beide kanten van je differentiaalvergelijking vermenigvuldigen met de integrerende factor en het daarna te schrijven als $\frac{d}{dt} \mu(t)y(t)$.

1.4: Separable equations

We bekijken de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(t)}$$

Hieruit volgt

$$F(y(t)) = \int g(t) dt + c, \left(F(y) = \int f(y) dy \right)$$

En we kunnen dan meestal makkelijk $y(t)$ eruit halen.

Bij een beginwaarde probleem kunnen we eerst de vergelijking oplossen en dan de constante bepalen m.b.v. de beginwaarde. Ook kunnen we de vergelijking

$$\int_{y_0}^y f(r) dr = \int_{t_0}^t g(s) ds$$

Oplossen.

1.9: Exact equations, and why we cannot solve very many differential equations

We kunnen alle differentiaalvergelijkingen oplossen die van de vorm $\frac{d}{dt}\phi(t, y) = 0$ zijn.

Definitie: De differentiaalvergelijking

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

Heet exact als $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$.

We gaan nu drie methoden bekijken om een impliciete oplossing te bepalen:

1^e methode: $\phi(t, y) = \int M(t, y) dt + h(y)$. We kunnen vervolgens $h(y)$ bepalen met

$$h'(y) = N(t, y) - \int \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} dt$$

2^e methode: $\phi(t, y) = \int N(t, y) dy + k(t)$. We kunnen vervolgens $k(t)$ bepalen met

$$k'(t) = M(t, y) - \int \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} dy$$

3^e methode: Dit is de 1^e en 2^e methode samen. Als we $\phi(t, y)$ bepalen zoals bij deze methoden, dan zien we vaak al snel wat $h(y)$ en $k(t)$ zijn.

We schrijven de impliciete oplossing uiteindelijk als $\phi(t, y) = c$, waarbij c constant is.

Vergelijkingen die niet exact zijn, kunnen we exact maken door een integrerende factor te gebruiken.

Deze moet voldoen aan

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \frac{\partial N}{\partial t}$$

Wat we soms tegenkomen is dat de integrerende factor alleen afhangt van t óf van y . Stel het hangt alleen van t af, dan wordt de vorige vergelijking

$$N \frac{d\mu}{dt} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) \text{ of } \frac{d\mu}{dt} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)}{N} \mu$$

We willen dat $\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)}{N}$ alleen afhangt van t , zodat $\mu(t) = e^{\int R(t) dt}$, $R(t) = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)}{N}$

Chapter 2: Second-order linear differential equations

2.1: Algebraic properties of solutions

Een tweede orde differentiaalvergelijking is van de vorm

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

Beginvoorwaarde zijn nu van de vorm $y(t_0) = y_0$ en $y'(t_0) = y_0'$

Tweede orde differentiaalvergelijkingen zijn erg moeilijk op te lossen, we kunnen alleen de differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t)$$

Oplossen. Dit is een lineaire tweede orde differentiaalvergelijking.

We bekijken weer de homogene differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0$$

Het Existence-uniqueness Theorem laat zien dat er een oplossing bestaat en dat deze uniek is. Hiervoor zijn wat voorwaarden, maar daar wordt op het tentamen wel aan voldaan.

We kunnen een operator definiëren die van $y(t)$ een nieuwe functie maakt

$$L[y](t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y$$

Een operator met de volgende eigenschappen

1. $L[cy] = cL[y]$
2. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$

Heet een lineaire operator. We zien dat $y(t)$ een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking als $L[y](t) = 0$. Wegens de eigenschappen zien we dat alle lineaire combinaties $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking.

Als $y_1(t)$ en $y_2(t)$ twee oplossingen zijn, zodat $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0$, dan is de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking gelijk aan $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$.

We noemen $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ de Wronskiaan van y_1 en y_2 en noteren het als $W(t) = W[y_1, y_2](t)$.

Definitie: De functies $y_1(t)$ en $y_2(t)$ heten lineair afhankelijk als de één een constante keer de ander is. Ze heten onafhankelijk als ze niet afhankelijk zijn.

De Wronskiaan is niet gelijk aan 0 $\Leftrightarrow$ de oplossingen zijn lineair onafhankelijk. Dus als we twee lineair onafhankelijke oplossingen hebben, dan weten we de algemene oplossing. Deze twee functies heten een fundamentele verzameling van oplossingen.

2.2: Linear equations with constant coefficients

We bekijken in deze paragraaf de homogene lineaire tweede orde differentiaalvergelijking van de vorm

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0$$

We zien dat de tweede afgeleide, eerste afgeleide en de functie zelf van hetzelfde type moeten zijn. Oftewel, formules als polynomen zullen niet goed zijn. E-machten daarentegen wel.

$$L[e^{rt}] = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$$

Dit geeft twee oplossingen

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ \& } r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Als de determinant groter is dan 0, dan krijgen we als oplossing $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.

Als de determinant kleiner is dan 0, dan krijgen we complexe oplossingen voor r . De oplossing wordt dan

$$y(t) = e^{-\frac{bt}{2a}} [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)], \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

We vinden dit door één van de oplossingen van r te gebruiken en dan $y(t) = c_1 \operatorname{Re}\{e^{r_1 t}\} + c_2 \operatorname{Im}\{e^{r_1 t}\}$.

Als de determinant gelijk is aan 0, dan krijgen we één oplossing voor r en dus ook maar één oplossing, $y_1(t)$, voor de differentiaalvergelijking.

Gegeven één oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Een 2^e lineair onafhankelijke oplossing is

$$y_2(t) = y_1(t) \int u(t) dt, u(t) = \frac{e^{-\int p(t) dt}}{y_1^2(t)}$$

In het geval met constante coëfficiënten vinden we dat $y_2(t) = t y_1(t)$.

2.3: The nonhomogeneous equation

We bekijken nu de differentiaalvergelijking $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$.

We zien dat $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \psi(t)$, waarbij y_1 en y_2 oplossingen zijn van de homogene differentiaalvergelijking en ψ een oplossing is van de particuliere oplossing.

2.4: The method of variation of parameters

Er wordt hier een methode gegeven om een particuliere oplossing te vinden m.b.v. de homogene oplossingen. Dit is een nogal rottige manier, dus bekijk vooral ook de volgende paragraaf met 'judicious guessing'.

$$\begin{aligned} \psi(t) &= u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) \\ u_1'(t) &= -\frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)} \text{ \& } u_2'(t) = \frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)} \end{aligned}$$

2.5: The method of judicious guessing

Stel $g(t)$ is een polynoom, en de differentiaalvergelijking heeft constante coëfficiënten. Dan

$$\psi(t) \begin{cases} A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n, c \neq 0 \\ t(A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n), c = 0, b \neq 0 \\ t^2(A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n), c = 0, b = 0 \end{cases}$$

Een andere differentiaalvergelijking die we tegen kunnen komen is $ay'' + by' + cy = (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n)e^{\alpha t}$. Dan is een particuliere oplossing $y(t) = e^{\alpha t} v(t)$, met $a \frac{d^2 v}{dt^2} + (2a\alpha + b) \frac{dv}{dt} + (a\alpha^2 + b\alpha + c)v = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$.

Stel we hebben een complexe differentiaalvergelijking $L[y] = ay'' + by' + cy = g_1(t) + ig_2(t)$ met als oplossing $y(t) = u(t) + iv(t)$. Dan $L[u] = g_1$ en $L[v] = g_2$.

2.8: Series solutions

Machtreeksen zijn oneindige polynomen. Sommige eigenschappen zijn

1. $y(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - t_0)^n$ heet een machtreeks rond $t = t_0$
2. Machtreeksen hebben een convergentiestraal (radius of convergence) ρ , zodat de reeks convergeert voor $|t - t_0| < \rho$ en divergeert voor $|t - t_0| > \rho$.
3. We kunnen de reeks per term integreren/differentiëren en deze nieuwe reeksen hebben dezelfde convergentiestraal.
4. Een manier om de convergentiestraal te bepalen is de Cauchy test, $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ en $\rho = \frac{1}{\lambda}$.
5. $[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - t_0)^n][\sum_{n=0}^{\infty} b_n(t - t_0)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t - t_0)^n$, $c_n = a_0 + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$
 $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - t_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(t - t_0)^n}$ ($b_0 \neq 0$) is ook een machtreeks.
6. Vele functies zijn te schrijven (te benaderen met) machtreeksen.

Laat t complexe waarden aannemen en zij z_0 het dichtstbijzijnde punt bij t_0 zodat f of een van de afgeleiden niet meer bestaat op z_0 . Dan is de convergentiestraal ρ gelijk aan de afstand tussen t_0 en z_0 in het complexe vlak.

We bekijken nu de differentiaalvergelijking $L[y] = P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0$, met $P(t), Q(t), R(t)$ machtreeksen rond t_0 . Laat dan ρ zodat $\frac{Q(t)}{P(t)}$ en $\frac{R(t)}{P(t)}$ convergeren voor $|t - t_0| < \rho$. Dan is de differentiaalvergelijking analytisch rond $t = t_0$ en is de convergentiestraal van de oplossing op zijn minst ρ . We vinden de coëfficiënten van y door de machtreeks in de differentiaalvergelijking te stoppen en de som van alle coëfficiënten die voor dezelfde machten van t staan gelijk te stellen aan 0.

Vanaf hier gaat 2.8 nog langer door, maar dit is nogal veel om te lezen en volgens mij niet nodig. Bekijk het zelf nog mocht je het willen. (vanaf bladzijde 198).

2.9: The method of Laplace transforms

Definitie: Zij $f(t)$ een functie gedefinieerd op $0 \leq t < \infty$. Dan is de Laplace transformatie gelijk aan

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

De Laplace operator is lineair. Er zijn een paar condities op $f(t)$:

1. f is stuksgewijs continu, dus f heeft een eindig aantal discontinuïteiten op elk interval en de linker- en rechterlimiet bestaan voor elke discontinuïteit.
2. $\exists M, c \in \mathbb{R}: |f(t)| \leq Me^{ct}, 0 \leq t < \infty$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

Bekijk Example 4 op bladzijde 230 voor een voorbeeld van hoe je dit goed kan gebruiken om een tweede orde differentiaalvergelijking op te lossen.

2.10: Some useful properties of Laplace transforms

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

2.11: Differential equations with discontinuous right-hand sides

Een functie f , met c naar rechts verschuiven doen we door $g(t) = H_c(t)f(t-c)$, met $H_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$, wij kennen hem als de unit step function, ze noemen hem ook wel de Heaviside function.

$$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$$

Zie Example 4 voor het opdracht, waarbij ze een discontinue functie gebruiken bij een differentiaalvergelijking. Het is een beetje gedoe doen met Heaviside functies.

2.12: The Dirac delta function

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \text{ en } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\text{We zien ook } \int_a^b g(t)\delta(t-t_0) dt = \begin{cases} g(t_0), & a \leq t_0 \leq b \\ 0, & \text{else} \end{cases}.$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t-t_0) dt = e^{-st_0}, t_0 \geq 0$$

2.13: The convolution integral

De convolutie van f met g wordt gegeven door

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du$$

Het bijzondere eraan is dat $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \times \mathcal{L}\{g(t)\}$

De convolutie kan gebruikt worden om “makkelijk” de inverse van een Laplace te vinden. (Zie Example 3 en 4 bladzijden 255 en 256).

2.14: The method of elimination for systems

Hier wordt uitgelegd hoe twee differentiaalvergelijkingen die van elkaar afhangen (dus x' , y' hangen van x , y af) opgelost kunnen worden. Bekijk even één Example (bladzijde 257) en je snapt het wel.

2.15: Higher-order equations

Alle theorie is hetzelfde als voor 2^{de} orde differentiaalvergelijkingen, maar dan dus voor hogere orden.

$$L[y] = a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t)y = 0, a_n(t) \neq 0$$

Heet een algemene n^{de} orde homogene differentiaalvergelijking. De beginvoorwaarden die hier bij horen zijn

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{n-1}(t_0) = y_0^{n-1}$$

Zij $y_1(t), \dots, y_n(t)$ n lineair onafhankelijke oplossingen van de differentiaalvergelijking, dan is $y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$ de algemene oplossing.

Stel niet homogeen, dan $y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) + \psi(t)$

Er staat nog meer in het hoofdstuk, maar dit is dus allemaal hetzelfde. Zelf vond ik Example 6 op bladzijde 261 nog wel handig om te bekijken.

Chapter 3: Systems of differential equations

3.1: Algebraic properties of solutions of linear systems

In dit hoofdstuk wordt gekeken naar simultane 1^e orde differentiaalvergelijkingen, dus

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

De oplossing hiervan zijn n functies. We hebben ook weer beginvoorwaarden $x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$.

We kunnen ook een n^{de} orde differentiaalvergelijking omschrijven naar een simultane 1^e orde differentiaalvergelijking door $x_1(t) = y, x_2(t) = \frac{dy}{dt}, \dots, x_n(t) = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$.

Wanneer alle functies f lineaire functies zijn van $x_1, \dots, x_n$, dan heet het systeem van vergelijkingen lineair. Als alle functies niet van een aparte functie van t afhangen, dus niet $\frac{dx_k}{dt} = a_{k1}(t)x_1 + \dots + a_{kk}(t)x_k + \dots + a_{kn}(t)x_n + g_k(t)$, dan is het systeem homogeen. Zonder $g_k(t)$ is het dus homogeen.

In dit hoofdstuk hangen de coëfficiënten niet van t af.

We bekijken vervolgens alles met vectoren en matrices. Dit ga ik niet in deze samenvatting stoppen, want we kennen het allemaal van lineaire algebra. Mocht je nog je kennis erover willen opfrissen, lees dan bladzijde 266 t/m 269

Als $x(t)$ en $y(t)$ twee oplossingen zijn, dan zijn cx en $x + y$ ook oplossingen.

3.4: Applications of linear algebra to differential equations

Ook voor zo'n systeem van differentiaalvergelijkingen geldt het "Existence-uniqueness theorem", dus er bestaat een oplossing en deze is uniek.

De dimensie van de ruimte van alle oplossingen van een homogeen lineair systeem van differentiaalvergelijkingen is n .

Om te kijken of n oplossingen $(x_1, \dots, x_n)$ lineair onafhankelijk zijn hoeven we alleen maar een makkelijke t_0 te kiezen en te kijken of $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn.

3.8: The eigenvalue-eigenvector method of finding solutions

We bekijken een 1^e orde lineaire homogene differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = Ax, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definitie: v heet een eigenvector van A met eigenwaarde λ , als $Av = \lambda v$. Hierbij laten we de vector $v = 0$ buiten beschouwing.

We weten allemaal hoe we de eigenwaarden en eigenvectoren kunnen vinden.

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking die aan het begin van deze paragraaf is gegeven is gelijk aan

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{(\lambda_1 t)} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$$

Hierbij mogen de eigenwaarden gelijk aan elkaar zijn.

Eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden zijn onafhankelijk.

3.9: Complex roots

Als $\lambda = a + ib$ een complexe eigenwaarde is van $\mathbf{A}$ met eigenvector $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$, dan is $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ een complexe oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Zij $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + iz(t)$ een complexe oplossing, dan zijn $\mathbf{y}(t)$ en $\mathbf{z}(t)$ reële oplossingen.

3.10: Equal roots

We definiëren

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \dots$$

$\mathbf{I}$ is de identiteitsmatrix.

Dit geeft de volgende manier om n lineair onafhankelijke oplossingen te vinden van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ te vinden.

1. Als er n verschillende eigenwaarden zijn, dan $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{(\lambda_1 t)} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$
2. Stel er zijn maar $k < n$ verschillende eigenwaarden. Dan hebben we i.i.g. k verschillende oplossingen van de vorm $e^{\lambda t} \mathbf{v}$. Om de andere oplossingen te vinden kiezen we een eigenwaarde λ en we zoeken elke $\mathbf{v}$, zodat $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$ en $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Voor deze $\mathbf{v}$ is $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} [\mathbf{v} + t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}]$ een andere oplossing. We doen dit voor elke λ .
3. Als we nu nog niet genoeg oplossingen hebben, dan zoeken we alle $\mathbf{v}$, zodat $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \mathbf{x}(t))^3 \mathbf{v} = \mathbf{0}$ en $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Voor deze $\mathbf{v}$ is $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \left[\mathbf{v} + t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} + \frac{t^2}{2!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v} \right]$ een andere oplossing. We doen dit voor elke λ .
4. We blijven dit herhalen totdat we n lineair onafhankelijke oplossingen hebben.

3.11: Fundamental matrix solutions; $e^{\mathbf{A}t}$

Zij $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$, n lineair onafhankelijke oplossingen van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, dan is elke oplossing te schrijven als $\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t)$. Laat dan $\mathbf{X}(t)$ de matrix zijn met als kolommen $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$. Elke oplossing is dan te schrijven als $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{c}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. De matrix $\mathbf{X}(t)$ heet een fundamenteel matrix.

Zij $\mathbf{X}(t)$ een fundamenteel matrix van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, dan is $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^{-1}(0)$

3.12: The nonhomogeneous equation; variation of parameters

We bekijken nu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$. Via wat wiskundig gedoe ziekt we dat $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^{-1}(t_0) \mathbf{x}_0 + \mathbf{X}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(s) \mathbf{f}(s) ds$. Als $\mathbf{X}(t)$ de fundamentele matrix oplossing $e^{\mathbf{A}t}$ is, dan wordt dit

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\mathbf{f}(s) ds$$

Vaak is het makkelijker om de homogene oplossing op te lossen en dan een particuliere oplossing te gokken. (Bijvoorbeeld $\psi(t) = be^{ct}$).

3.13: Solving systems by Laplace transforms

Schrijf $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. En laat $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\{x_1(t)\} \\ \vdots \\ \mathcal{L}\{x_n(t)\} \end{pmatrix}$ en $\mathbf{F}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{f}(t)\} =$

$\begin{pmatrix} \mathcal{L}\{f_1(t)\} \\ \vdots \\ \mathcal{L}\{f_n(t)\} \end{pmatrix}$. Dit resulteert in

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{F}(s) \Leftrightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{F}(s)$$

Chapter 4: Qualitative theory of differential equations

4.1: Introduction

We bekijken weer de differentiaalvergelijking $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, maar nu $\mathbf{f}$ niet lineair. Er zijn geen methoden bekend om zo'n differentiaalvergelijking op te lossen. Wel kunnen we er andere dingen mee. Één van de

dingen waar we in geïnteresseerd zijn, zijn evenwichtspunten. Dat zijn punten $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$, zodat

$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking. We willen ook wat over de stabiliteit van oplossingen weten. Oftewel, stel we gaan iets van de oplossing af, komen we dan weer terug op de oplossing, of gaan we naar oneindig? Ook is het interessant om te weten wat er gebeurt als $t \rightarrow \infty$. Deze drie onderwerpen worden in dit hoofdstuk beschouwd.

Het is makkelijk om de evenwichtspunten te vinden. We zien dat er moet gelden $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, dit geeft “makkelijke” vergelijkingen.

Differentiaalvergelijkingen, waarbij $\mathbf{f}$ niet van de tijd afhangt heten autonoom (autonomous).

4.2: Stability of linear systems

We bekijken hier autonome differentiaalvergelijkingen. Zij $\phi(t)$ een oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. We gaan onderzoeken of $\phi(t)$ stabiel is.

Definitie: Een oplossing is stabiel als elke oplossing die dicht bij deze oplossing ligt, er voor altijd dicht bij blijft. Een oplossing is dan onstabiel als er minstens één andere oplossing bestaat, zodat deze in het begin dichtbij ligt, maar ver weg gaat met de tijd.

Voor de lineaire differentiaalvergelijking $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ geldt het volgende:

1. Als alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ een negatief reëel deel hebben, dan zijn alle oplossingen stabiel
2. Als ten minste één van de eigenwaarden van $\mathbf{A}$ een negatief reëel deel hebben, dan zijn alle oplossingen instabiel

- Deze zullen we niet gebruiken (ben ik nooit tegengekomen i.i.g.), bekijk bladzijde 378 als je het wilt zien. Het komt erop neer dat voor elke eigenvector, $\mathbf{v}$, met $\operatorname{Re}\{\lambda\} = 0$ moet gelden dat $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Definitie: de lengte van een vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ is hier $\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. (dit wordt gebruikt om het vorige te bewijzen).

Definitie: Een oplossing heet asymptotisch stabiel als het stabiel is en elke oplossing die er dichtbij genoeg bij begint, de oplossing benadert wanneer $t \rightarrow \infty$. In het bijzonder voor evenwichtspunten geldt dat elke oplossing dichtbij het punt er naartoe gaat als $t \rightarrow \infty$.

4.3: Stability of equilibrium solutions

We bekijken nu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$, waarbij $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ klein is t.o.v. $\mathbf{x}$. Dit zien we als $\frac{g_1(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|}, \dots, \frac{g_n(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|}$

continue functies zijn die 0 worden als $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dit is zo als $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ een polynoom is die begint met een orde 2 of hoger.

Als we zo'n functie $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ hebben, dan:

- De evenwichtoplossing $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ asymptotisch stabiel als de evenwichtoplossing $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ asymptotisch stabiel is bij de vergelijking $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Dus als alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ negatief reëel deel hebben.
- De evenwichtoplossing van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ is instabiel als ten minste één eigenwaarde een positief reëel gedeelte heeft.
- De stabiliteit van een oplossing kan niet worden bepaald vanuit de stabiliteit van $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ als er een ten minste één eigenwaarde is met reëel gedeelte gelijk aan 0 (en de rest negatief).

Bekijk nu een autonome differentiaalvergelijking $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ met evenwichtspunt $\mathbf{x}^0$.

- Zij $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$
- Schrijf $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{z})$ in de vorm $\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{z})$, met $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ een vector polynoom van $\mathbf{z}$ die begint met een orde van 2 of hoger.
- Als het reële gedeelte van alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ negatief zijn, dan is het evenwichtspunt stabiel, als er ten minste één eigenwaarde is met een positief reëel gedeelte, dan is het evenwichtspunt instabiel.

Ik raad het aan om Example 2 op bladzijde 391 te bekijken, daar kan je mooi zien hoe het voorgaande precies werkt.

4.4: The phase-plane

We bekijken $\frac{dx}{dt} = f(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = g(x, y)$. Dan zien we dat $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$. Dus de banen van de oplossingen zijn de oplossingen van $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$.

Dit gaat alleen goed als $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$, niet ergens tegelijkertijd 0 zijn. Als een baan van $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$ door een evenwichtspunt van $\frac{dx}{dt} = f(x,y)$ of $\frac{dy}{dt} = g(x,y)$ gaat, dan is het een vereniging van allemaal verschillende banen.

Ook al krijgen we vaak geen expliciete oplossingen kunnen we wel de baan van een oplossing vinden, omdat we op elk punt weten wat de richting is (dat zijn dus de pijltjes in een faseportret) en daar kunnen we krommen uit afleiden.

4.6: Quantative properties of orbits

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Als alle functie $f_1, \dots, f_n$ continue partiële afgeleiden hebben (met respect tot $x_1, \dots, x_n$), dan heeft het beginvoorwaarde probleem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ een oplossing, die uniek is.

Als $\phi(t)$ een oplossing is, dan is $\phi(t + c)$ ook een oplossing (oftewel het maakt niet uit “wanneer” we op de oplossing beginnen).

Hieruit volgt dat door elk punt maar één oplossing gaat. Ook geldt dat als een oplossing een keer terug komt in zijn beginpunt na een tijd T , dan is de oplossing periodiek met periode T .

Hiervoor mag er dus geen evenwichtspunt liggen op zo’n kromme.

4.7: Phase portraits of linear systems

We bekijken hier $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Wanneer de eigenwaarden $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, dan hebben we een stabiele knoop als evenwichtspunt. Als $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, dan hebben we een instabiele knoop als evenwichtspunt. Als $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, dan andere vorm maar volgens mij ook een stabiele knoop. Voor $0 < \lambda_1 = \lambda_2$ nu dan instabiele knoop.

Stel $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, dan hebben we een zadelpunt.

Als we eigenwaarden $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ en $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ hebben met $\beta \neq 0$, dan onderscheiden we nog

1. $\alpha = 0$, dan krijgen we cirkels rond het evenwichtspunt. Dit noemen we centrum. De richting van rotatie bepalen we door op een bepaald punt te kijken wat de richting is.
2. $\alpha < 0$, dit geeft een stabiele spiraal.
3. $\alpha > 0$, dit geeft een instabiele spiraal.

Stel we hebben $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$, met $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ weer klein t.o.v. $\mathbf{x}$. Dan is het faseportret van deze differentiaalvergelijking hetzelfde als bij $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, rond de evenwichtspunten.

Bij Huiswerk 3 zagen we dat als we een matrix kunnen definiëren als $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix}$. Door dan de evenwichtspunten in te vullen, verkrijgen we wat voor evenwichtspunten het zijn.

4.8: Long time behavior of solutions; the Poincaré-Bendixson Theorem

In deze paragraaf wordt gekeken naar het gedrag van een oplossing na een lange tijd.

Als een oplossing montoon en begrensd is, dan convergeert het.

Als een oplossing naar een vector convergeert, bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, dan is (x_1, x_2) een evenwichtspunt van de differentiaalvergelijking.

Bekijk $\frac{dx}{dt} = ax - bxy - ex^2, \frac{dy}{dt} = -cy + dxy - fy^2, a, b, c, d, e, f$ constanten. Een oplossing $x(t), y(t)$ die in een gebied I begint op $t = t_0$, dan blijft het in dit gebied voor $t \geq t_0$ en uiteindelijk benaderd het het evenwichtspunt $x = \frac{a}{e}, y = 0$.

Er zijn nog wat meer Lemma's over deze differentiaalvergelijking, bekijk hiervoor bladzijde 431.

Nu komt de Theorem van Poincaré-Bendixson:

Stel een oplossing $x(t), y(t)$ van de differentiaalvergelijking $\frac{dx}{dt} = f(x, t), \frac{dy}{dt} = g(x, t)$, in een begrensd gebied blijft, waar geen evenwichtspunt in zit. Dan gaat de baan als een spiraal naar een gesloten kromme, wat zelf een periodieke oplossing van de differentiaalvergelijking is.

Paragrafen 4.9 en 4.10 staan op de planning, maar is niet voor het tentamen.