



Samenvatting

Gewone differentiaalvergelijkingen - Collegejaar 2015-2016

Boek: Differential Equations and their Applications, Fourth Edition

Disclaimer

De informatie in dit document is afkomstig van derden. W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' betracht de grootst mogelijke zorgvuldigheid in de samenstelling van de informatie in dit document, maar garandeert niet dat de informatie in dit document compleet en/of accuraat is, noch aanvaardt W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' enige aansprakelijkheid voor directe of indirecte schade welke is ontstaan door gebruikmaking van de informatie in dit document.

De informatie in dit document wordt slechts voor algemene informatie in dit documentdoeleinden aan bezoekers beschikbaar gesteld. Elk besluit om gebruik te maken van de informatie in dit document is een zelfstandig besluit van de lezer en behoort uitsluitend tot zijn eigen verantwoordelijkheid.

Samenvatting Gewone Differentiaalvergelijkingen

Hoofdstuk 1

p. 1 – 126

Def p3: Een eerste-orde lineaire DV is gegeven door $\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$.

Def: Als $\frac{dy}{dt} + a \frac{dy}{dt} = b(t)$ en $y(t_0) = x_0$ dan heet dit een beginwaardeprobleem.

Def p3: Een DV heet homogeen als $b(t) = 0$, dus $\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$

Oplossing p7: (1) Scheiden van variabelen y en t .
(2) Als dit niet goed werkt, kan het handig zijn om een integrerende factor $\mu(t)$ te zoeken zodat $\mu(t) = \exp(\int a(t)dt)$. Want dan $\mu(t)y = \int \mu(t)b(t)dt + C$.

Vb: (1) Ex1/2 p20/21.
(2) Ex6/7 p8/9.

Def p60: Een DV gegeven door $M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$ heet exact als $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$

Oplossing p60: Zoek $f(y, t)$ zodat $M(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}$ en $N(t, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ (let op, gebruik bij eerste keer integreren geen C maar een functie $k(x)$ of $h(y)$ en los die op uit de tweede integraalvergelijking.

Vb: Ex3 p61.

Def p63: Een DV kan je exact maken door te kijken of er een integrerende factor $\mu(t, y)$ bestaat zodat $\mu(t, y)M(t, y) + \mu(t, y)N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$ exact is. Dan moet dus gelden $M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \frac{\partial N}{\partial t}$.

Oplossing p64: Meestal bestaat er een $\mu(t, y)$ die alleen van t of alleen van y afhangt. Dit is een kwestie van even proberen op een kladblaadje.

Vb: Ex6 p64/65.

Def p68/69: Een Picard-iteratie op een DV gegeven door $y' = f(t, y)$ is een rij functies waarvoor geldt dat $y_{n+1}(t) = y_n + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s))ds$.

St p77: Laat R het vierkant : $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, $|y - y_0| \leq b$ waarvoor geldt dat $M = \max_{(t,y) \in R} |f(t, y)|$ en $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Dan heeft het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y), f(t_0) = y_0$ een unieke oplossing op $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.

Hoofdstuk 2

p. 127 – 263

Def p127:	Een DV van de vorm $y'' = f(t, y, y')$ heet een <u>tweede orde DV</u> .
Def p128:	Een DV heet een <u>tweede orde lineaire homogene DV</u> als de DV geschreven kan worden in de vorm $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.
Def p131:	Laat $L: Y \rightarrow Y$ een <u>lineaire operator</u> zijn als $\forall c \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in Y$: 1) $L[cy] = cL[y]$ 2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$
Def 133:	Laat $y_1 \neq y_2$ twee oplossingen van de tweede orde lineaire DV zijn. Dan heet $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0$ de <u>Wronskiaan</u> en wordt het genoteerd als $W(t) = W[y_1, y_2](t)$. Verder is $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ de <u>algemene oplossing</u> van deze DV.
Def p138:	De DV gegeven door $L[y] = ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ met $a \neq 0$ heet een <u>tweede orde lineaire DV met constante coëfficiënten</u> .
Def p138:	Laat $y = e^{rt}$ een oplossing zijn van hierboven. Dan is $ar^2 + br + c = 0$ de <u>karacteristieke vergelijking</u> van de DV. Dan $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Drie gevallen:	1) $b^2 - 4ac > 0$. Dan $r_{1,2}$ reëel, en is de algemene oplossing gegeven door $y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$. 2) $b^2 - 4ac = 0$. Dan is er één oplossing. De algemene oplossing wordt nu gegeven door $y(t) = c_1e^{rt} + c_2te^{rt}$. 3) $b^2 - 4ac < 0$. Vul één oplossing in en kijk of deze (Re en Im apart!) lin. onafh. zijn. Zo ja, is de algemene oplossing bekend. Zo nee, andere waarde ook proberen.
Vb:	1) Ex 1/2 p139. 2) Ex 1 p148. 3) Ex 1/2 p143.
St p151:	De oplossing van een lineaire tweede orde DV kan gevonden worden door eerst de homogene oplossingen $y_1(t)$ en $y_2(t)$ te zoeken. Daarna kan je het beste kijken of je direct een particuliere oplossing $y_p(t)$ ziet. Zo nee, pech. Zo ja, dan is de oplossing gegeven door $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + y_p(t)$
Def p153:	Laat $y_1(t)$ en $y_2(t)$ twee oplossingen van een tweede orde homogene DV zijn. Dan kan de particuliere oplossing soms gevonden worden door <u>variatie van parameters</u> . Laat hierbij $y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$ een oplossing van de DV zijn en los hieruit $u_1(t)$ en $u_2(t)$ op.
Vb:	Ex 1 p155.
Def p157:	Als je vermoed dat een oplossing een bepaalde vorm heeft, kan de methode <u>judicious guessing</u> toegepast. Hierbij kies je een oplossing die alleen nog afhangt van constanten, bijv. $y(t) = at^2 + bt + c$ en je lost a, b, c op.
Vb:	Ex 1/2 p158/160.
Def p188:	Een oplossing van een DV heet een <u>machtreeks rond $t = t_0$</u> als $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - t_0)^n$.
Oplossen:	Vul de standaardmachtreeks zoals hierboven in in de DV. Schrijf dan de sommen zodanig om dat alle sommen gaan van 0 tot ∞ en overal t^n staat. Vervolgens kan je alle sommen weghalen (en de t^n) en zo de recurrente betrekking voor de coëfficiënten oplossen. Nadat je de recurrente betrekking hebt gevonden, moet je de 'gewone betrekking' ook vinden. Het makkelijkst is om de eerste 2,3 termen in te vullen en hopen dat er een mooi patroon ontstaat.
Tip:	Zorg ervoor dat <u>voordat</u> je de machtreeks invult de DV zo omgeschreven is dat er geen breuken meer in staan. Dat maakt het stukken makkelijker!

Convergentie: Een machtreeks is niet op heel $\mathbb{R}$ convergent. Zie p189-191 voor meer info.

Vb: Ex 1 p186/187, Ex 2 p190.

Def p198: Laat $L[y] = P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0$. Een DV heet singulier op $t = t_0$ als $P(t_0) = 0$. Het punt $t = t_0$ heet dan een singulier punt. Meestal gebeuren er rare dingen, zoals discontinuïteit en/of divergentie.

Def p198: De DV gegeven door $L[y] = t^2 y''(t) + \alpha t y'(t) + \beta y(t) = 0$ heet de vergelijking van Euler.

Oplossing: Laat $y = r^t$ een oplossing zijn. Na uitwerken volgt $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$, dus $r_{1,2} = -\frac{1}{2}[(\alpha - 1) \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}]$.

Geval 1: $(\alpha - 1)^2 - 4\beta > 0$. Dan is $y(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}$ de algemene oplossing van de vgl. van Euler.

Geval 2: $(\alpha - 1)^2 - 4\beta = 0$. Dan is $y(t) = (c_1 + c_2 \ln(t))t^r$ de algemene oplossing van de vgl. van Euler.

Geval 3: $(\alpha - 1)^2 - 4\beta < 0$. Laat $r = \lambda \pm i\mu$. Dan is $y(t) = t^\lambda [c_1 \cos(\mu \ln(t)) + c_2 \sin(\mu \ln(t))]$ de algemene oplossing van de vgl. van Euler.

Let op p203: Als $(t - t_0)$ ipv t gebruikt is in de Euler vergelijking, is dit ook een Euler vgl. en kan de oplossing gevonden worden door $(t - t_0)^r$ erin te stoppen.

Vb: Ex 1,2,3 p199-202.

Def: De DV $L[y] = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$ heeft een regulier singulier punt op $t = 0$ als $tp(t)$ en $t^2 q(t)$ analytisch zijn in $t = 0$ (dwz geen $\pm\infty$). Singuliere punten die niet regulier zijn, heten irregulier.

Vb: Ex 1,2,3 p204/205.

NB: In paragraaf 2.8.3 staan nog meer voorbeelden van gare dingen met machtreeksen maar dat heb ik hem niet zien doen, dus ik vermoed dat we dat niet hoeven te kunnen.

Def p226: De Laplace transformatie is gegeven door $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$.

Belangrijk:
 $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
 $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
 $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = F'(s)$
 $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$
 $\mathcal{L}\{u_c(t) f(t - c)\} = e^{-cs} F(s)$
 $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

Def p252: De convolutie is gedef. als $(f * g)(t) = \int_0^t f(t - u)g(u)du$.

Belangrijk: $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \times \mathcal{L}\{g(t)\}$

Hoofdstuk 3

p. 264 – 371

Def p268: Een stelsel lineaire DV's is een stelsel DV's dat te schrijven is als $\dot{x} = Ax$.

Def p273: Een verzameling V heet een vectorruimte (en x, y vectoren) als

- 1) $x + y = y + x$ (commutatieve wet)
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associatieve wet)
- 3) $\exists 0 \in V: x + 0 = x$
- 4) $\forall x \in V: \exists (-x) \in V: x + (-x) = 0$
- 5) $1x = x \forall x \in V$
- 6) $(ab)x = a(bx) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, x \in V$
- 7) $a(x + y) = ax + ay$
- 8) $(a + b)x = ax + bx$

St p291: Laat $\dot{x} = Ax$ en $x(t_0) = x_0$. Dan bestaat er een unieke oplossing voor dit beginwaardeprobleem.

Let op: In de paragrafen 3.2 t/m 3.7 behandelen ze uitgebreid de lineaire algebra, ik neem aan dat iedereen wel weet wat een matrix is en hoe je dingen als nulruimtes, basissen of matrixproducten uitrekt.

Def p333: Laat $\dot{x} = Ax$. Dan is $x(t) = e^{\lambda t}v$ een oplossing $\Leftrightarrow Av = \lambda v$. Dan heet λ een eigenwaarde en v een eigenvector van de DV.

Oplossing:

- 1) Bepaal de eigenwaarden. Als positief, dan 2). Als negatief, dan zijn Re en Im beide lin. onafh. oplossingen!
- 2) Bepaal de eigenvectoren.
- 3) Dan is $x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$ een oplossing.

NB: Als er een eigenwaarde is met een dubbele multipliciteit, dan zoek dan

- (1) $(A - \lambda I)v = 0$
- (2) $(A - \lambda I)^2 v = 0$ en $(A - \lambda I)v \neq 0$.

Tip: Als er eigenwaarden met dubbele multipliciteiten voorkomen en $f(t)$ is een oplossing, dan is vaak $tf(t)$ een oplossing.

Vb:

- (1) Ex 1 p335, Ex 2 p338
- (2) Ex 1 p341
- (3) Ex 1,2 p348-351

Def p355: Een matrix $X(t)$ heet een fundamentalmatrix als de kolomruimtes lin. onafh. oplossingen zijn van $\dot{x} = Ax$.

Def p356: Er geldt dat $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$ met A de DV matrix.

Def p360: Als een stelsel DV's te schrijven is als $\dot{x} = Ax + f(t)$ dan heet dit stelsel inhomogeen.

Oplossing: De oplossing van dit probleem is $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s)ds$. Zoals zichtbaar in Ex1 op p361 kost dit echter megaveel rekenwerk, dus de methode van judicious guessing werkt vaak veel sneller.

Tip: Als je judicious guessing toepast, meestal kan je een oplossing vd vorm van $f(t)$ kiezen. Let op, dan moet $\lambda \neq c$. Is dit wel het geval, kies dan $f(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$ als oplossing voor een zekere $k \in \mathbb{N}$ (meestal $k = 1$, soms $k = 2$)

Def p368: Een inhomogeen stelsel kan ook opgelost worden dmv. Laplace. Het eenvoudigst is om hierbij eerst de transformeren en daarna alle vectoren $(x_1, \dots, x_k)$ apart te bekijken.

Hoofdstuk 4 paragrafen 1 t/m 8

p. 372 – 437

Def p373: Punten in een stelsel DV heten evenwichtspunten als $\dot{x} = 0$.

Def p378: We kijken naar oplossingen van $\dot{x} = Ax$.

(1) $\lambda \in \mathbb{R} > 0$. Dan is een evenwichtspunt een instabiele knoop.

(2) $\lambda \in \mathbb{R} = 0$. Dan is een evenwichtspunt een zadelpunt.

(3) $\lambda \in \mathbb{R} < 0$. Dan is een evenwichtspunt een stabiele knoop.

(4) $\lambda \in \mathbb{C} > 0$. Dan is een evenwichtspunt een instabiele spiraal.

(5) $\lambda \in \mathbb{C} = 0$. Dan is een evenwichtspunt een centrum.

(6) $\lambda \in \mathbb{C} < 0$. Dan is een evenwichtspunt een stabiele spiraal.

NB: Als $\forall \lambda$ een van bovenstaande dingen geldt, dan geldt dit ook voor alle oplossingen van dit stelsel.

Vb: Ex 1,2,3 p381/382.

Def p390: Als we te maken hebben met $\dot{x} = f(x)$, dan is de matrix te vinden door de Jacobi-matrix:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

NB: Om te controleren of evenwichtspunten te voldoen aan een voorwaarde van de eigenwaarden is het slim om eerst bovenstaande matrix te berekenen, dan punten in te vullen en dan de eigenwaarden te berekenen.

Def p396: Laat $\dot{x} = f(x, y)$ en $\dot{y} = g(x, y)$. Dan geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$ de orbits of solutions van de oorspronkelijke DV.

Oplossing: Vrijwel altijd is bovenstaande DV separabel en zodoende oplosbaar.

NB p397: Belangrijk is dat $\frac{dy}{dt} \neq 0$ en $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Als een oplossing van deze orbit door een evenwichtspunt gaat, is deze oplossing GEEN orbit.

Def: Een faseportret kan getekend worden (met de hand...) rondom een evenwichtspunt zodra die geassocieerd is en de bijbehorende eigenvector(en) bepaald is/zijn. Eigenvectoren zijn in de plot vaak stabiele lijnen waaromheen je lijnen van/naar/rondom de evenwichtspunten moet tekenen.

Vb: Zie Ex1,2,3 op p425/426 voor nuttige info.

St p433: Als een oplossing van $\dot{x} = f(x, y)$ en $\dot{y} = g(x, y)$ begrensd is in een gebied en er zijn geen evenwichtspunten in dit gebied, dan is de orbit een gesloten kromme die periodiek is.

NB: Speciaal voor Roel: ze bedoelen hier niet-triviale gesloten krommes, dus krommes met 1 punt erin zijn geen gesloten krommes.

Vb: Ex 2 p433/434.