



Samenvatting

Partiële Differentiaalvergelijkingen - Collegejaar 2012-2013

Samenvatting verschillende vergelijkingen, methodes en bijbehorende voor- en nadelen

Disclaimer

De informatie in dit document is afkomstig van derden. W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' betracht de grootst mogelijke zorgvuldigheid in de samenstelling van de informatie in dit document, maar garandeert niet dat de informatie in dit document compleet en/of accuraat is, noch aanvaardt W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' enige aansprakelijkheid voor directe of indirecte schade welke is ontstaan door gebruikmaking van de informatie in dit document.

De informatie in dit document wordt slechts voor algemene informatie in dit documentdoeleinden aan bezoekers beschikbaar gesteld. Elk besluit om gebruik te maken van de informatie in dit document is een zelfstandig besluit van de lezer en behoort uitsluitend tot zijn eigen verantwoordelijkheid.

1. 'GROTE' SAMENVATTING

1.1. Homogeen probleem, homogene randen, eindig gebied. Dit los je op met scheiding van variabelen. Het aantal randvoorwaarden is gelijk aan het aantal afgeleiden naar de plaats en het aantal beginvoorwaarden is gelijk aan het aantal afgeleiden naar de tijd.

1.2. Laplace's Equation, rechthoek.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Je lost dit op door in 4 problemen te splitsen die allemaal 3 homogene randen en 1 inhomogene rand hebben. Dit is makkelijk op te lossen met scheiding van variabelen en de 4 oplossingen tel je bij elkaar op. Dit is een stationair probleem.

1.3. Laplace's Equation, cirkel.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Je past weer scheiding van variabelen toe. Je hebt hier periodiek gedrag! Je hebt 1 randvoorwaarde (de rand van de cirkel) en het is een stationair probleem.

1.4. Wave Equation.

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho_0(x) Q(x, t)$$

Dit los je op met scheiding van variabelen. Deze problemen zijn fysisch heel makkelijk voor te stellen.

1.5. SLV problemen.

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{d\phi}{dx} \right) q\phi + \lambda \sigma \phi = 0$$

Deze problemen zijn niet heel makkelijk om op te lossen, maar ze hebben wel allemaal fijne eigenschappen. Alle voorgaande problemen zijn van deze vorm (volgens mij).

- (1) Alle $\lambda \in \mathbb{R}$
- (2) Er zijn oneindig veel eigenwaarden $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ en $\lambda_n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$
- (3) Voor elke λ_n is er een unieke $\phi_n(x)$ die $n - 1$ nulpunten heeft.
- (4) $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$ voor elke $f(x)$ als a_n goed gekozen worden.
- (5) De eigenfuncties zijn orthogonaal ten opzichte van $\sigma(x)$.
- (6) We kunnen λ uitrekenen met behulp van het Rayleigh quotiënt.

1.6. Hogere dimensies. Dit los je allemaal op met scheiding van variabelen. Je hebt evenveel beginvoorwaarden als afgeleiden naar de tijd en evenveel randvoorwaarden als afgeleiden naar een andere variabele. Bij cirkelachtige problemen (waar je overgaat op poolcoördinaten), dan krijg je Besselfuncties. Onthou dat $Y_m(x) \rightarrow -\infty$ als $x \rightarrow 0$.

1.7. Homogeen probleem, inhomogene randen, eindig gebied. Je zoekt een evenwichtsooplossing $r(x, t)$ die aan dit probleem voldoet. Dan zeg je $u(x, t) = v(x, t) + r(x, t)$. Je hoeft nu alleen nog $v(x, t)$ te vinden en dit is weer een homogeen probleem met homogene randen.

1.8. Inhomogeen probleem, homogene randen, eindig gebied. Je veronderstelt je eigenfuncties bekend (die kan je toch numeriek benaderen). Aan de hand daarvan bepaal je een uitdrukking voor u , die met allemaal lastige formules wordt berekend die je hopelijk niet uit je hoofd hoeft te kennen. Dit heet de methode van eigenfunctie-expansie.

1.9. Greense functies. Je stelt je oplossing van de vorm

$$\int_0^L f(x_0)G(x, x_0)dx_0$$

Je zoekt dan dus de formule G die hieraan voldoet. Dit doe je door hetzelfde probleem op te lossen, maar dan te stellen dat $f(x) = \delta(x - x_0)$ en homogene randvoorwaarden te nemen.

Je gebruikt de Greense formule:

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b$$

Waarbij $u = u$ en $v = G$. Daarna wissel je x en x_0 om. Dit mag vanwege symmetrie. Dan heb je een uitdrukking gevonden voor $u(x)$. In hogere dimensies is de formule van de vorm

$$\iint (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dA = \oint (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \hat{n} ds$$

Voor $\lambda = 0$ hebben de problemen of geen oplossingen, of oneindig veel. Dit ligt aan de waarde van $\int f(x)\phi(x)dx$. Voor de Greense functie met de operator δ zijn er nooit oplossingen bij deze eigenwaarde. Daarom moet je bij $\lambda = 0$ kijken naar de gegeneraliseerde Greense functie, degene met operator $\delta(x - x_0) - \frac{\phi_h(x)\phi_h(x_0)}{\int_a^b \phi_h^2(x)dx}$.

Er zijn voor oneindige domeinen in de 2e en 3e dimensies oplossingen bekend voor problemen met een enkele bron. Door positieve of negatieve bronnen op tactische plaatsen kun je zo op een relatief makkelijke manier een gesloten gebied of een halfoneindig domein nabouwen die aan je randvoorwaarden voldoet. Als je bijvoorbeeld in twee dimensies werkt en je hebt het halfoneindige gebied met $u = 0$ op de rand, plaats je een negatieve puntbron gespiegeld in de rand, waardoor je aan de randvoorwaarde voldoet.

1.10. Fouriertransformaties.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega \text{ en } F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx$$

Om een probleem op een oneindig domein op te lossen, gebruik je Fouriertransformaties. Je veronderstelt dat er geen energie is in het oneindige. Hierbij transformeer je over je x -variabele. Meestal gebruik je na je transformatie scheiding van variabelen. Je hebt ook sinus- en cosinustransformaties:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sin(\omega x) d\omega \text{ en } F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

De cosinustransformatie is analoog gedefiniëerd. Om een probleem met een tweede afgeleide op te lossen met een cosinustransformatie, moet je $df/dx(0)$ kennen en wil je het liefst een even functie. Voor de sinustransformatie wil je $f(0)$ weten en

werk het liefst met een oneven functie. Je gebruikt geen Fouriertransformaties bij bronnen die van de tijd afhangen.

1.11. Laplacetransformaties. Bij een (half-)oneindig interval kan je ook gebruik maken van de Laplacetransformatie, die transformeert over de tijdsvariabele:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \text{ en } f(t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st}ds$$

Merk op dat je bij de inversetransformatie complex integreert, dus je zult dan de residuenstelling toe moeten passen ofzo.

1.12. Methode van karakteristieken. De methode dient om voor een PDV karakteristieken (kenmerkende krommen) te vinden waarlangs de PDV een gewone differentiaalvergelijking wordt, die oplosbaar is. De gevonden oplossing wordt omgezet in een oplossing van de oorspronkelijke PDV. Dit doe je door naar andere variabelen over te gaan en dan de karakteristieken te bepalen. Daarna moet je weer terugtransformeren, maar dit is niet altijd even makkelijk en soms niet eens mogelijk. Niet-lineaire oplossingen zijn met (12.7.3) soms in quasilineaire vorm te schrijven, waardoor je ook die op kan lossen.

Deze methode geeft ook veel inzicht in een probleem. Als twee karakteristieken bijvoorbeeld snijden, komt er een schokgolf.

1.13. d'Alembert. Meneertje d'Alembert had een ontdekking gedaan over de golfvergelijking. Hij vond dat de oplossing van de golfvergelijking te schrijven is als

$$\frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x_0)dx_0$$

Er ontstaan dus eigenlijk twee golven, waarvan eentje met snelheid c naar links gaat en eentje met snelheid c naar rechts gaat. Hieraan gerelateerd is dat bij een touw waarbij een impuls wordt gegeven er dus een golf naar links gaat en eentje naar rechts. Bij een Dirichlet randvoorwaarde komt de golf aan de andere kant terug (dus als hij van boven kwam, gaat hij daarna in tegengestelde richting aan de onderkant verder) en bij een Neumann randvoorwaarde komt hij aan dezelfde kant terug.

2. DE VERSCHILLENDE METHODES EN DE VOOR- EN NADELEN

2.1. Scheiding van variabelen.

Voordelen:

- Relatief makkelijk en snel

Nadelen:

- Alleen eindige intervallen en homogene problemen en randen; veruit de meest gelimiteerde van de methoden

2.2. Eigenfunctie-expansie.

Voordelen:

- Je kan niet-homogene probleempjes oplossen! Jeej.
- Het is eigenlijk de eigenfuncties benaderen met de computer/uitrekenen en daarna dingen in formules gooien

Nadelen:

- Alleen eindig gebied en homogene randen.

2.3. Greense functies.

Voordelen:

- Je kan het onafhankelijk van de begin-/randvoorwaarden opstellen
- Je kan problemen op oneindige gebieden oplossen en aan de hand daarvan ook oplossingen voor half-oneindige of eindige vlakken opstellen

Nadelen:

- Alleen gegeneraliseerde Greense functies bij $\lambda = 0$.
- Je moet eigenlijk alsnog het probleem oplossen, maar dan met $f(x) = \delta(x - x_0)$. Dus je kan hem niet altijd vinden.

2.4. Fouriertransformatie.

Dit pas je op op de plaatsvariabele

Voordelen:

- Je kan problemen op oneindige intervallen oplossen (en half-oneindig in het geval van sin- en costransformatie).
- Voor sommige problemen is het getransformeerde probleem veel makkelijker om op te lossen.

Nadelen:

- Soms kan je het niet echt toepassen omdat de transformatie het probleem niet makkelijker maakt.

2.5. Laplacetransformatie.

Dit pas je op op de tijdsvariabele (hoewel de naam anders doet vermoeden!)

Voordelen:

- Dit kan je toepassen als je een lastig inhomogeen deel hebt ipv een lastige vergelijkingen

Nadelen:

- De inversetransformatie (als je die niet uit een tabel kan maken) maakt gebruik van complexe integratie.
- Je kan het ook niet altijd toepassen

2.6. Methode van Karakteristieken.

Voordelen:

- Je kan hier ook quasilineaire problemen mee oplossen, als enige van de methoden die we hebben gekregen.

Nadelen:

- Het is een impliciete methode waarbij je niet altijd terug kan gaan naar de originele variabelen
- Het kan alleen bij vergelijkingen van de eerste orde