



Samenvatting

TI1106M Calculus

Samenvatting colleges 2014

Door: David Alderliesten

Disclaimer

De informatie in dit document is afkomstig van derden. W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' betracht de grootst mogelijke zorgvuldigheid in de samenstelling van de informatie in dit document, maar garandeert niet dat de informatie in dit document compleet en/of accuraat is, noch aanvaardt W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' enige aansprakelijkheid voor directe of indirecte schade welke is ontstaan door gebruikmaking van de informatie in dit document.

De informatie in dit document wordt slechts voor algemene informatie in dit documentdoeleinden aan bezoekers beschikbaar gesteld. Elk besluit om gebruik te maken van de informatie in dit document is een zelfstandig besluit van de lezer en behoort uitsluitend tot zijn eigen verantwoordelijkheid.

1 – Functies en notaties, functie inverse, etc.

Functie, Functie Notatie, injectieve functies, en andere basis dingen over functies.

Functie

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Een functie kan geschreven worden op vele manieren:

- $f(x) = 63x + 23 + 71$
- $g(x) = 63x + 23 + 71$
- $f : x \rightarrow 63x + 23 + 71$
- $Y = 63x + 23 + 71$

Domein, $dom(x)$

“De minimale en/of maximale verdeling van de x.”

Een domein is een beschrijving/bevinding van de minimale en/of maximale *value* van de x getallen. Er bestaat een domein als er een x-asymptoot is, als de functie niet zou bestaan voor x, of als de functie zelf nooit onder of boven een bepaald getal kon vallen.

- $f(x) = \sin(x) \rightarrow dom(x) = \mathbb{R}$
 - In dit geval zijn alle reële getallen het domein, omdat een sin valuta alle “echte” nummers kan zijn. Makkelijker is het om te zeggen... er zijn oneindig veel X valuta.
- $g(x) = 1 / \sqrt{x} \rightarrow dom(x) = (0, \infty)$
 - Een denominatief mag nooit nul zijn. Verder, omdat een sqrt/wortel altijd positief moet zijn, moet de x groter zijn dan 0.

Bereik, $range(x)$

“De minimale en/of maximale verdeling van de Y.”

Het bereik is een beschrijving van de maximale valuta van de Y of f(x) getallen. Er bestaat een bereik als dit gegeven is, als er een asymptoot is op de Y-as, of als de functie zelf nooit boven of onder een bepaald punt kan komen.

- $f(x) = \sin(x) \rightarrow range(y) = [-1, 1]$
 - Een sin gaat altijd tussen -1 en 1 golven. Daarom is het bereik -1 to 1, inclusief -1 en 1.
 - De randlijnen beteken “inclusief.”
- $g(x) = 1 / \sqrt{x} \rightarrow range(y) = (0, \infty)$
 - Deze functie zal altijd groter zijn dan het getal 0 (dat moet, zie hierboven), maar kan dan tot oneindig.

- De randlijnen betekenen in dit geval “niet inclusief,” omdat 0 er niet bij zit, en omdat oneindig geen nummer is.

Injectieve functies, *inverse*, f^{-1}

$$“f(x) = y, f(x) = x”$$

Een injectieve functie, soms ook een *inverse function*, is een spiegeling van een originele functie waarbij de x en de Y worden omgekeerd. Kenmerk van een injectieve functie:

- Domein en bereik draaien om.
- De grafiek spiegelt in de lijn $x=Y$.
- Niet alle functies zijn injectief.
- Injectieve functies zijn “een-op-een,” of “one-to-one.”

Het injectief/inverse van een functie kan worden gevonden door, in de originele functie, de x's en Y'en te verwisselen met elkaar, en dan voor Y berekenen.

$$f(x) = 4x^3 - 5$$

$$Y = 4x^3 - 5$$

$$X = 4Y^3 - 5$$

$$4Y^3 = X + 5$$

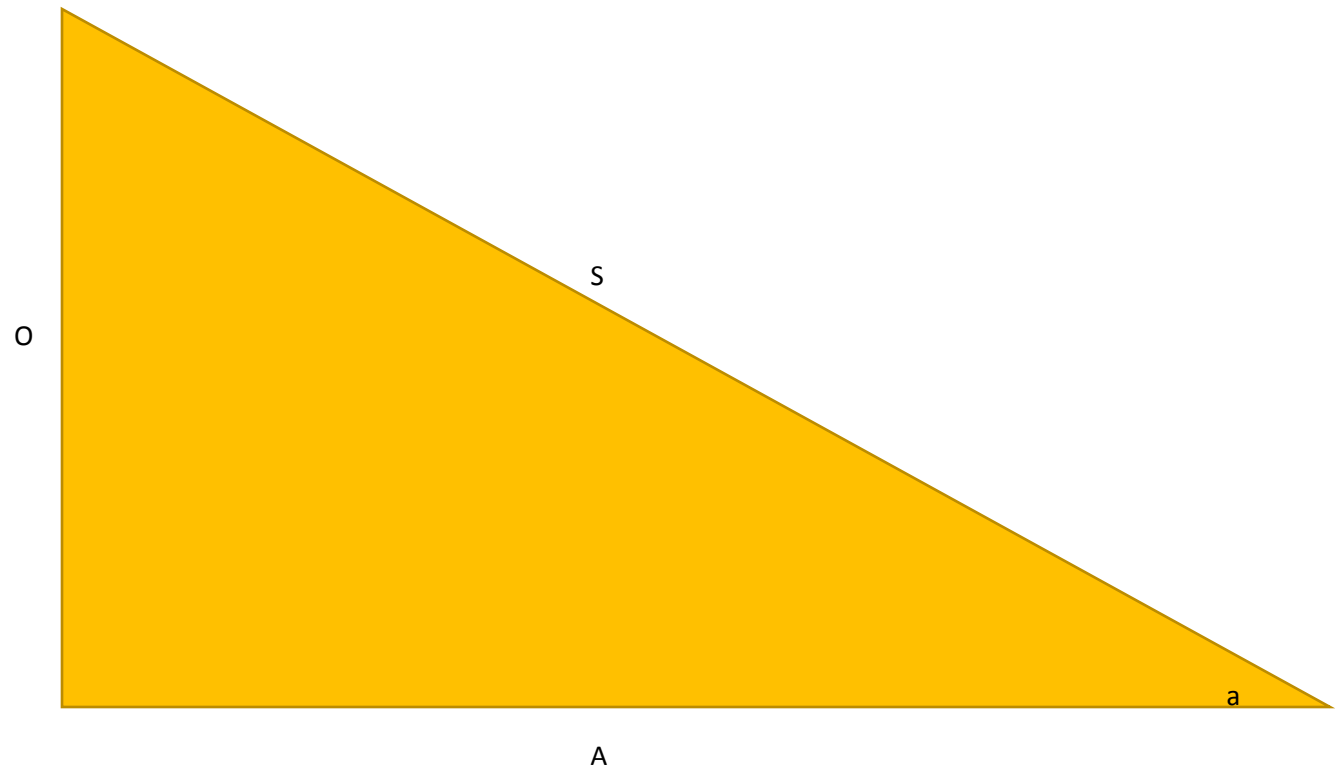
$$Y^3 = (X + 5)$$

$$3$$

$$Y = \sqrt[3]{(X+5) / 3}$$

2 – Goniometrie, Trigonometrie, Domein en Bereik van..., etc.

Basis Goniometrie/Trigonometrie



$$\sin(a) = O / S$$

$$\cos(a) = A / S$$

$$\tan(a) = O/A$$

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$$

$$A^2 + O^2 = S^2$$

Basis Regels

Domein en Bereik van Gonio/Trigono functies

Standaard Domeinen

De standaard domeinen voor de Gonio/Trigono functies bestaan om ervoor te zorgen dat de functie altijd een keer golft, en ook een injectief heeft.

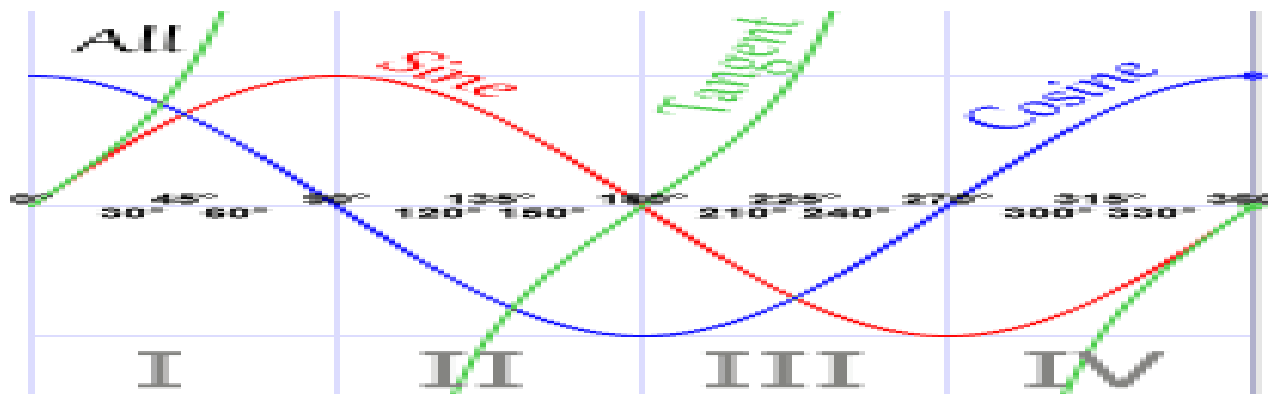
- Sin $\rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Cos $\rightarrow (0, \text{infinity})$
- Tan $\rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Injectieve Regels voor Gonio/Trigono functies

De injectieve functies voor Gonio/Trigono functies zijn niet hetzelfde als bij normale functies. Deze functies worden afgebeeld als *arccos* of als *arcsin*. Hieronder staan de regels.

- $X = \arcsin(Y) \leftrightarrow Y = \sin(x), \quad \text{dom}(x) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $X = \arccos(Y) \leftrightarrow Y = \cos(x), \quad \text{dom}(x) = (0, \pi)$
- $X = \arctan(Y) \leftrightarrow Y = \tan(x), \quad \text{dom}(x) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Grafieken van Sin, Cos, Tan



3 – Limieten, Continue functies, Rechter/Linker limieten

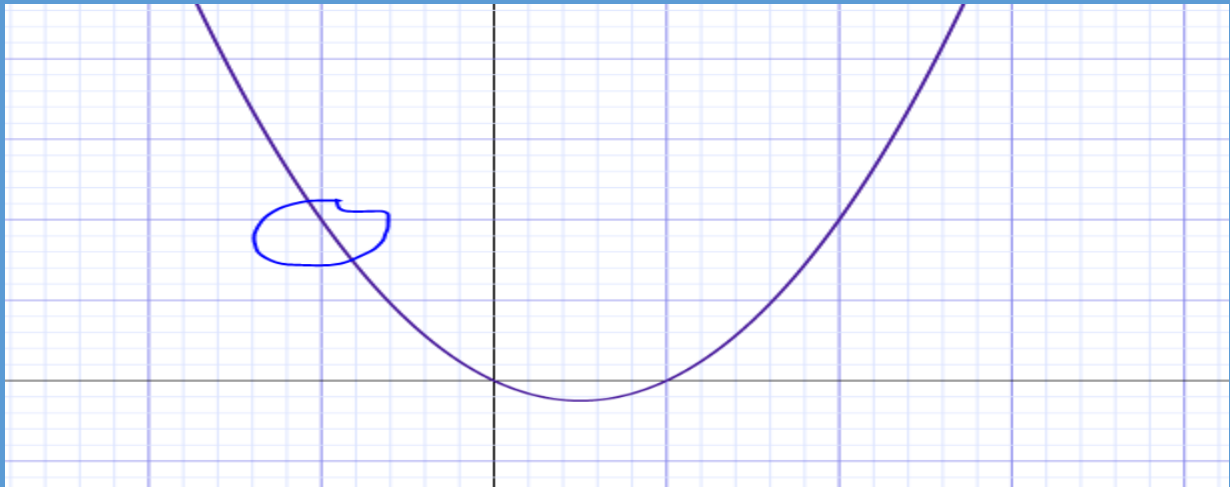
Limiet, *lim*

“De waarde van een functie als het naar een punt gaat.”

Een limiet is een waarde die wordt gegeven als er gezocht wordt in een functie waar meestal geen antwoord zou zijn. Dit kan zijn door een domein of door een bepaalde factor van de functie. Het limiet geeft aan waar de functie zou moeten zijn als het naar die punt ging/gaat.

$$\lim_{n \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{x + 1}$$

$$\text{Dom}(x) = \mathbb{R}, x \neq -1$$



$$\lim_{n \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{x + 1} = 2$$

Formeel wordt een limiet anders gedefinieerd:

“Als x dichterbij a komt, maar niet gelijk is aan a , dan komt $f(x)$ steeds dichterbij L .”

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Continue functie

“Als een limit en het gewoon invullen van een functie hetzelfde zijn.”

Een continue functie is eentje waar geen krik, gat, of iets dan ook in de functie zit als je hem op een grafiek zet. Zoals de naam al zegt, is de functie gewoon continu.

Limiet rekenregels

Als... $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = M$

- $\lim_{x \rightarrow a} c * f(x) = c L$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L + M$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) * g(x) = LM$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, als $M \neq 0$.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x - 6)}{x - 2} \\ & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} \\ & \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 \\ & = 5 \end{aligned}$$

Rechter/Linker limieten

“Limieten die zijn genomen gezien vanaf links of rechts.”

Rechter en link limieten zijn, zoals de naam impliceert, limieten die zijn bekeken vanaf links of rechts. Een normaal limiet kijkt naar de limieten van zowel links als rechts. Een normaal limiet bestaat daarom ook links en rechts. Linker en rechter limieten kunnen anders zijn, en als dat het geval is, bestaat er geen “normaal” limiet.

4 – Oneindige Limieten, Standaardlimieten, Squeeze Theorem

Oneindige Limieten

“Limieten die zich richten op plus of min oneindig.”

Oneindige limieten kijken naar de waarde van een functie als het naar plus of min oneindig gaat. Dit wordt gedaan door de functies zodanig te veranderen dat er in het algemeen door de hoogste waarde van x kan worden getrokken. De non- x valuta houden dan een waarde bij plus of min oneindig.

Limieten van/naar oneindig kunnen ook betreffen de functies die van zichzelf naar oneindig gaan (bijvoorbeeld door een 0 in de numerator of een algemene niet bestaande waarde).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \text{Bestaat niet, omdat de } 0^+ \text{ en } 0^- \text{ limieten niet gelijk zijn}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 - 2x - 8)}{(x^2 - 5x + 6)}$$

$$\frac{4 - 4 - 8}{4 - 10 + 6}$$

$$\frac{-8}{0}$$

$$= \infty$$

Standaardlimieten

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ax} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

Squeeze Theorem

Squeeze theorem zorgt ervoor dat limieten kunnen worden gevonden voor goniometrische/trigonometrisch functies. Dit wordt gedaan door de Sin(x), Cos(x), of andere soortgelijke functie een coëfficiënt te geven dat op zichzelf ook al een functie is. Via manipulatie van de limieten van dat variabel kan een limiet "bewezen" worden.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(x)$$

$$-1 \leq x^2 \sin(x) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin(x) \leq x^2$$

$$0 \leq x^2 \sin(x) \leq 0$$

$$= 0$$

5 – Differentiëren, Dif. Rekenregels, Differentiëren met gonio/trigono functies

Differentiëren

“Helling van een grafiek bij $x = a$ ”

Bij differentiëren wordt er gekeken naar het verschil tussen de *slope* op verschillende momenten van een grafiek en/of van een functie. De officiële definitie geldt als volgende:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Rekenregels van het differentiëren

ALS f, g differentieerbaar zijn, c constant.

- $(C * f)' = C * f'$
- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f * g)' = f' * g + f * g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{(g * f') - (g' * f)}{g^2}$

Goniometrische, Trigonometrische, en algemene standaardderivaten

- $\frac{dy}{dx} x^r = R x^{R-1}$
- $\frac{dy}{dx} e^{3x} = e^{3x} * 3$
- $\frac{dy}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{dy}{dx} \sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{dy}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{dy}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Kettingregel

De kettingregel zegt dat functies die in elkaar zitten altijd van buiten naar binnen moeten worden gedifferentieerd.

6 – l'Hopital's regel

De regel

L'Hopital's regel stelt dat functies diens limieten naar 0/0 of oneindig/oneindig gaan gevonden kunnen worden door de teller en numero apart te differentiëren. Formeel gezien: stel dat $f(x)g(x)$ differentieerbaar is, en het huidige limiet eindigt op 0/0 of oneindig/oneindig, dan...

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g'(x)}$$

Let op dat dit niet hetzelfde is als de quotiënt regel. Je differentieert beide functies apart, zonder besef van elkaar, totdat er een limiet bestaat.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$\frac{-2x}{1}$$

$$= -2$$

Algemene rekenregels voor de stelling

- Het huidige limiet moet 0/0, oneindig/oneindig, of $-\infty/\infty$ zijn.
- Je mag zo vaak als je maar wil de regel toepassen, mits er uiteindelijk een limiet bestaat.
- De quotiënt regel moet niet worden toegepast, behandel elke functie als een aparte.

7 – Linearisering en het differentiaal

Bij linearisatie wordt gezocht naar een *approximation* van een lastig of reken-belastende som. Dit wordt gedaan door een functie te nemen die dichtbij de originele functie komt, en dan de echt waarde in die nieuwe functie te stoppen.

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

De lineaire functie zoekt voor de raaklijnen tussen de originele functie en de nieuwe functie. Deze raaklijn is ook de nieuwe formule die wordt gevonden, $L(x)$.

Voorbeelden

$$f(x) = \sqrt{1 + \ln(x)}, \text{ geef } l(x) \text{ van deze functie bij } x = 1$$

$$f(a) = \sqrt{1 + \ln(x)} = \sqrt{1} = 1$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \ln(x)} * \frac{1}{x}$$

$$F'(a) = \frac{1}{2}$$

$$L(x) = 1 + .5(x - a)$$

$$= 1 + .5x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

8 – Integratie, rekenregels van integratie

Integratie is het proces van het vinden van de gesigioneerde oppervlakte tussen grafiek van f en de x -as. Het stamt uit de Riemann som, waarbij vierkanten worden gebruikt om het gebied onder een grafiek te vinden.

$$\int_a^b f(x) dx = L, \quad \text{waar } L = \text{limiet}$$

De integraal is niks meer dan het gebied tussen de x -as en de grafiek zelf, net als de Riemann sommen.

Rekenregels

- $\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Standaard Primitieven

- $\int x^r = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- $\int \sin(x) = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c$
- $-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + c$

9 – Partiele integratie en de substitutie regel

Bij integratie zijn niet dezelfde regels of trucjes als bij differentiatie. Het is alleen mogelijk om te integreren (in het geval van meerdere sommen of functies), via een van twee regels: de substitutie regel, of via partiele integratie.

Substitutie regel

Als een integraal moet worden gevonden met meerder functies, kan men een substituuut maken die een gedeelte van de functie vervangt door een variabel, vaak de u . Door de u en dan de du te vinden kan een lastige of grote functie worden geïntegreerd.

$$\begin{aligned} & \int 2x\sqrt{1+x^2} dx \\ & u = 1+x^2, \text{ dus } du = 2x \\ & \int \sqrt{u} du \\ & \int u^{\frac{1}{2}} du \\ & \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \\ & \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

In het voorbeeld hierboven komt het overeen dat de du en de overblijvende functie met elkaar overeen komen. Als dit niet het geval is, kan de overblijvende functie/valuta buiten de integraal gezet worden.

Partiele Integratie

Soms is het niet mogelijk om de substitutie regel toe te passen. In dit geval kan men overgaan tot partiele integratie. Bij partiele integratie wordt een formule gebruikt die bewezen is om een integraal op te splitsen in een makkelijkere functie die wel geïntegreerd kan worden. Dit moet soms meerdere malen voordat er een goede functie uitkomt.

De formule voor partiele integratie is als volgende:

$$\int f'(x) * g(x) dx = f * g - \int f(x) * g'(x) dx$$

$$\int e^x * x dx$$

$$\int e^x * x dx = e^x * x - \int e^x dx$$

$$\int e^x * x dx = e^x * x - e^x + C$$

10 – Oneigenlijke Integralen

Definitie

Sommige integralen gaan van een bepaalde parameter naar een andere parameter. Hierdoor moet iemand de integraal eerste integreren en dan nog de som afmaken. Soms gaat een van deze parameters naar een niet bestaand getal (zoals oneindig of min oneindig). Soms gaat een van deze parameters door een domein heen dat niet bestaat voor de functie. In deze gevallen is een integraal oneigenlijk.

Dit kan worden verholpen door een variabel limiet, zoals t , te nemen in de plaats van het probleem getal/valuta. Een paar voorbeelden staan aan de onderkant van dit document.

Voorbeelden van oneigenlijke integralen

- $\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow$ Deze integraal gaat naar oneindig, een niet bestaand getal.
- $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} \rightarrow$ Deze integraal gaat over een probleem domein, namelijk 0, omdat de functie dan niet bestaat.

Standaard oneigenlijke integralen

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} = \begin{cases} \text{Convergent voor } p > 1 \\ \text{Divergent voor } p < 1 \text{ of } p = 1 \end{cases}$

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$u = x - 2$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \right]_3$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{(t-2)^{\frac{1}{2}}} \right] + 2$$

$$= 2$$

11 – Rijen, het nut van rijen, etc.

Definitie

Een rij (of een sequence) is een set van getallen met een standaard definitie, en is een representatie van alle positieve en reële getallen. De algemene definitie is als volgt:

$$A_n = a_1, a_2, a_3 \dots a_n$$

$$\frac{n}{n+1} = a_n$$

$$\frac{1}{2} = a_1$$

$$\frac{2}{3} = a_2$$

Etc.

Limieten van Rijen

Stel, a_n is een rij en $f(x)$ is een functie zodat:

- $A_n = f(n)$ voor alle valuta van n .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

Dan geldt...

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(L)$

Convergentie en Divergentie

- Een convergente functie gaat naar een punt toe.
- Een divergente functie gaat naar een punt toe dat, buiten 0 om, niet bestaat (oneindig, etc).
 - Als een functie geen limiet heeft, is het divergent.
 - Als een functie schommelt tussen een min en een plus valuta, is die ook divergent.

Om dingen simpel te houden, worden functies voor rijen convergent geduid als ze naar een klein punt gaan, zoals nul. Alle anderen punten worden als divergent geaccepteerd.

Is de functie convergent of divergent?

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{10+n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{10+n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{n^2} + \frac{1}{n}}}$$

$$= \infty$$

Door het oneindige limiet is de functie divergent.

Power functions, krachtfunctie

De rij r^n is convergent voor een vaste stel waarden, en divergent voor alle andere valuta of waarden.

- Convergent : 0, voor $-1 < r < 1$
- Divergent: 1, voor $r = 1$
- Divergent: voor alle andere valuta/waarden.

Monotonie en de monotonische functie

Stel, a_n is een rij zodat:

- Er een getal m bestaat zodat $a_n \leq m$ voor alle $n \geq 1$.
- Er geldt $a_{n+1} > a_n$

Dan is een functie monotonische, en convergent.

12 – Reeksen, regels van reeksen, introductie tot reeksen

Introductie tot Reeksen

Een reeks is een set van getallen waarbij een formule de reeks definieert. Het verschil tussen een rij en een reeks is dat een rij een set van getallen moet zijn die je kan optellen. Een reeks is dat niet. Een reeks hoeft ook niet positief te zijn, en mag dus ook 0 of negatief zijn.

Stel: a_1, a_2, a_3 is een rij getallen. Dan is de oneindige som een reeks.

$$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Partiele sommen

Voor de partiele sommen...

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots S_n = \sum_{n=1}^N a_n$$

Als het limiet van n naar oneindig van S_n bestaat en gelijk is aan L , dan is de functie convergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Anders is de reeks divergent.

$$.3333333333 = \frac{1}{3}$$

$$.3 + .03 + .003 + .0003 = \frac{1}{3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$$

Algemene divergentie regel voor reeksen

Als de termen van een reeks niet naar nul gaan, is de functie divergent.

Meetkundige reeks, RATIO TEST

Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a$ is een meetkundige reeks als de volgende regel geldt voor alle n...

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- De waarde r heet de **rede** (ratio in English).
- Als $-1 < r < 1$, dan is de reeks convergent.
- Als $r \leq -1$ of $r \geq 1$, dan is de reeks divergent.

Is deze reeks convergent of divergent?

$$a_n = \frac{2n}{3n+1}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Convergent, want de rede is $2/3$. $2/3$ is tussen 1 en -1.

13 – Alternierende reeksen en de algemene ratio test voor reeksen

Alternierende reeksen

Een reeks is alternierend als hij tussen een getal en een min getal schommelt. In iets betere termen is de reeks alternierend tussen positief en negatief. Dit kan als volgende worden aangegeven:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$$

Convergentie van alternierende reeksen

Als een alternierende reeks...

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \dots$$

- $b_{n+1} \leq b_n$ (Simpelweg... de reeks is aan het dalen)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Dan is de alternierende reeks convergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$$

-De reeks is alternierend, dat zie je door de (-1) tot de macht n.

-Het limiet gaat naar 0...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{e^0}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

-De reeks is aan het dalen.

Dus is de reeks convergent, PROVEN THROUGH ALTERNATING SERIES TEST.

Officiële ratio test

De ratio test zorgt ervoor dat reeksen die in een rede/ratio zitten makkelijk kunnen worden gedefinieerd in termen van convergentie en divergentie.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. $L < 1$? Dan is de reeks convergent EN absoluut convergent.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. $L > 1$? Dan is de reeks divergent.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. $L = 1$? Dan **faalt** de test.

David's methode voor de ratio test

Delft en het calculus boek gebruiken een rare, vaak lastige vorm van de ratio test. Als je eventjes $\underline{g}$ als een functie ziet, dan kan het anders. Ik gebruik altijd deze methode:

$$[a_{n+1}] * [a_n]^{-1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)^2 * 2^{n+1}}{(n+1)!} * \frac{n!}{n^2 2^n}$$

$$= \frac{2 * (n+1)}{n^2 (n+1)}$$

$$= \frac{2}{n^2}$$

Limiet gaat naar 0.

Dus, via ratio test, convergent.

14 – Machtreeksen, power series

Algemene informatie en formule

Een machtreeks is een reeks waarin de waarden die gezocht worden niet bekend zijn voor X. De algemene definitie is als volgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n$$

- Convergent voor $|x-a| < r$
- Divergent voor $|x-a| > r$
- r staat ook bekend als de **convergentie straal**.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} (x-2)^n = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} * |(x-2)^{n+1}| * \frac{2^n}{\sqrt{n}} * \frac{1}{|(x-2)|}$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} * (x-2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \quad [Split \text{ alle } n \text{ termen}]$$

$$= 1$$

DUS...

$$\frac{1}{2} * |x-2| = 1$$

DUS...

$$\frac{1}{2} |x-2| < 1 \text{ EN } \frac{1}{2} |x-2| > 1$$

$$0 < X < 4$$

Power series, "P reeksen"

Een p-reeks is een reeks met een power (macht) in de noemer. De volgende regelt telt dan:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

- Convergent in het geval dat $P > 1$
- Divergent in het geval dat $P < 1$ of $p = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$P = 2$. Convergent via de p-test.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$P = 1$, divergent via de p-test.

Order van reeks testen

- Meetkundige reeks? $\begin{cases} \text{Convergent voor } -1 < r < 1 \\ \text{Divergent voor } r < -1 \text{ of } r > 1 \end{cases}$
- P-reeks? $\begin{cases} \text{Convergent voor } p > 1 \\ \text{Divergent voor } p < 1 \text{ of } p = 1 \end{cases}$
- Termen van limiet naar 0? $\begin{cases} \text{Nee? Divergent} \\ \text{Ja? Gebruik een andere test} \end{cases}$
- Alternierende reeks test.
- Ratio test.

15 – Reeks identiteiten, Diff/Int van reeksen

Reeks identiteiten

Sommige reeksen hebben identiteiten die gebruikt kunnen worden bij conversie en berekening. Voorlopig is deze genoeg:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1-(x^2)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Differentiëren en Integratie van meetkundige reeksen

Stel dat het volgende geldt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, r > 0$$

Dan:

- Is de functie differentieerbaar op $(a-r, a+r)$
- Is de primitieven gelijk aan $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

- Is $\int f(x)dx = C + C_0(x-a) + c_1(x-a)^2 + \dots$
 - Oftewel... $= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{-a}$

16 – Taylorreeksen en Limieten via Taylorreeksen

Taylorreeksen

Stel, de functie van $f(x)$ is willekeurig vaak differentieerbaar, dan wordt de Taylorreeks van de functie van x gegeven door:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n$$

- De functie $f(x)$ moet een machtreeks zijn.

Nieuwe standaardreeksen

- $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, |x| < 1$
- $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

$f(x) = e^x; a = 0; \text{Zoek de taylorpolynomiaal}$

N	$f^n(x)$	$f^n(a)$
0	e^x	1
1	e^x	1
2	e^x	1
3	e^x	1
4	e^x	1
5	e^x	1

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Limieten en Taylorreeksen

Taylorreeksen kunnen gebruikt worden om limieten van een reeks te vinden. Door gebruik van standaardreeksen kunnen we een antwoord vinden voor limieten, omdat bepaalde delen van de reeks tegen elkaar wegvallen.

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(x) * [\cos(x) - 1]}{e^{x^3} - 1}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

$$\sin(x) = x + O(x^3)$$

$$-1 + \cos(x) = -1 + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

$$-1 + \cos(x) = -\frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

$$-1 + e^{x^3} = -1 + 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} \dots$$

$$-1 + e^{x^3} = x^3 + O(x^6)$$

DUS...

$$f(x) = \frac{[x + O(x^3)] * [-\frac{x^2}{2} + O(x^4)]}{x^3 + O(x^6)}$$

$$f(x) = -\frac{x^3}{2}$$

$$\text{Limiet} = -\frac{1}{2}$$

17 – Complexe getallen, complexe display, complexe rekenregels, Argand diagrammen

Complexe getallen

Complexe getallen zijn getallen die niet reel zijn, en dus ook niet als een getal kunnen worden uitgedrukt. Zo heb je het getal i , dat gelijk is aan de wortel van -1 .

$$i^2 = -1$$

$$i = \sqrt{-1}$$

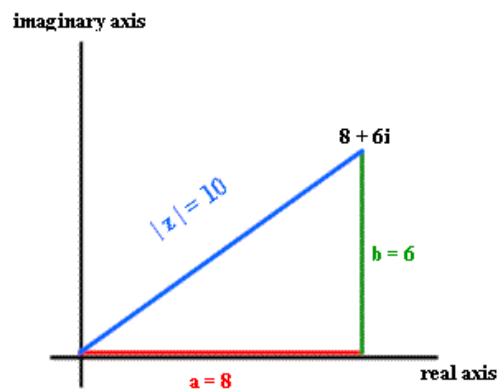
Complexe rekenregels en complexe notaties

Complexe getallen hebben een paar speciale rekenregels die helpen bij het berekenen.

- $Z = a + ib$
 - $\text{Re}(Z)$ = Real part of $Z = a$
 - $\text{Im}(z)$ = Imaginary part of $Z = b$
 - Z^* = Complex conjugate = $a - ib$
- r is de modulus van de complexe functie
 - $\text{mod}(r)$ wordt vaak als $|r|$ aangeduid
 - $\text{mod} = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Kijk naar de Argand diagram hieronder)
- θ is het argument van de complexe functie
 - Wordt ook aangeduid als $\arg(z)$
 - $\tan(\arg(z)) = \frac{b}{a}$

Argand Diagrammen

Argand diagrammen zijn de diagrammen die gemaakt worden om complexe functie te tekenen zoals normale functies.



Meer rekenregels voor complexe functies

- $|z * w| = |z| * |w|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- $\text{Arg}(z * w) = \arg(z) + \arg(w)$
- $\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$

$$z = 1 + 2i, w = 2 - 3i$$

Wat is $Z + W$?

$$= 1 + 2i + 2 - 3i$$

$$= 3 - i$$

$$z = 1 + 2i, w = 2 - 3i$$

Wat is $Z * W$?

$$= (1 + 2i)(2 - 3i)$$

$$= 2 + 4i - 3i - 6i^2$$

$$= 2 + 4i - 3i + 6$$

$$= 8 - i$$

$$Z = 1 + 5i, \text{ wat is } |z|?$$

$$Z = \sqrt{1^2 + 5^2}$$

$$Z = \sqrt{1 + 25}$$

$$Z = \sqrt{26}$$

18 – Polar form, De theorie van de Moivre, complexe e-machten

Polar form / Polaire vorm

Polaire vorm is een andere manier om een complex getal op te schrijven. Het maakt gebruik van het argument van de complexe functie en de modulus van de complexe functie.

$$1 + i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

- De wortel 2 komt van de modulus.
- Het argument is de hoek.
- Elke functie heeft altijd een cis vorm, oftewel $\cos + i \sin$.

De theorie van de Moivre

Stel:

$$Z = r_1 [\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)]$$

$$W = r_2 [\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)]$$

Dan geldt:

$$Z * W = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$z^n = r^n [\cos(n * \theta) + i \sin(n * \theta)]$$

$$(2\sqrt{3} + 2i)^5, \text{ zet in polaire vorm}$$

$$= 4^5 \left[\cos\left(5 * \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(5 * \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$= 1024 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]$$

Complexe e-machten=

De Moivre heeft zijn stelling verder uitgebreid. Hij vond namelijk dat complexe getallen ook werken met e-machten. Je kan van de polaire vorm direct naar de e-machten converteren.

$$\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$$

$e^{\pi+i}$, zet om naar de polaire vorm

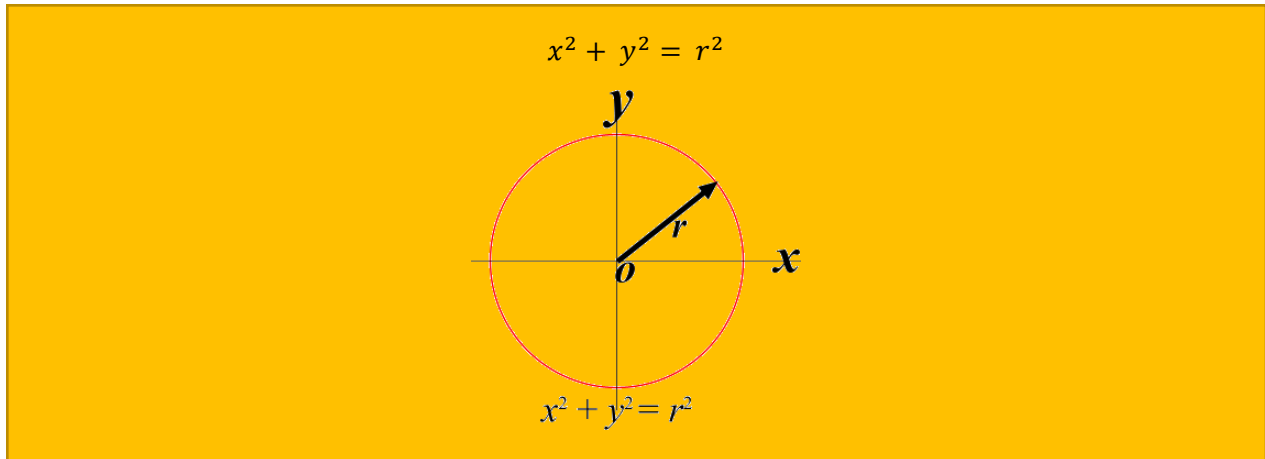
$$= e^{\pi} + e^i$$

$$= e^{\pi}[\cos(1) + i \sin(1)]$$

19 – Functies van meerdere variabelen, 3D systeem, Contour diagrammen

Functies van meerdere variabelen

Het is logisch dat niet alle functies maar een variabeel hebben. Functies met meerdere variabelen hebben vaak een x en een y in hun som of regel. Vaak worden deze functies gebruikt voor vergelijkingen die 3D toepassing hebben. Zo kan een cirkel gemaakt worden met de volgende functie:



Domein en Bereik van functies met meerdere variabelen

Deze functies hebben ook een domein en een bereik. Het domein is nog steeds gerelateerd aan de X waarden, en het bereik is nog steeds gerelateerd aan de Y waarden. Om het domein te vinden moet gewoon gekeken worden naar de verwachte termen. Zo zal een functie met een $\ln$ altijd groter zijn dan 0, en kunnen we dat ook gebruiken om het domein te vinden.

$$f(x) = \ln(9 - x^2 - y^2), \text{ vindt het bereik}$$

$$0 < \ln(9 - x^2 - y^2), [\text{Omdat } \ln \text{ altijd groter is dan } 0]$$

$$0 < 9 - x^2 - y^2$$

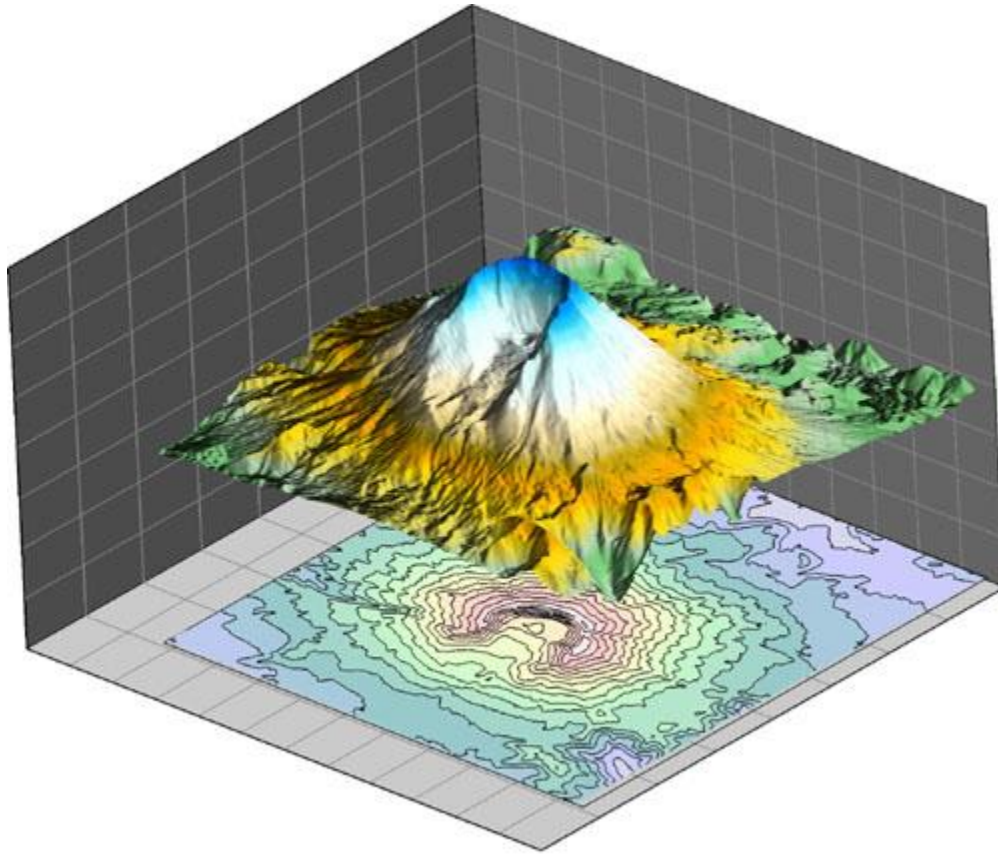
$$9 > x^2 + (3y)^2, u = 3y$$

$$9 > x^2 + u^2$$

$$y = \frac{u}{3}, \text{ dus } (-\infty, \ln(u)]$$

Contour en hoogte diagrammen

Een contour diagram geeft een functie neer in 2D, met hoogte waarden die overeenkomen met de hoogtes in 3D. Je kan een contour diagram omzetten naar een 3D plaatje, en vice-versa.



De 3D plaat bovenop wordt als een contour diagram onderin weergegeven

20 – Differentiatie van meerdere variabelen, partiele differentiatie, raakvlakken

Differentiatie van meerdere variabelen op de x en y assen, partiele differentiatie

We kunnen differentiatie van meerdere variabelen doen via partiele differentiatie. Hierbij differentiëren we de functie eerst in termen van X, en dan in termen van Y. Wanneer je de ene differentieert, zie je de andere als constante. Hierbij een voorbeeld:

$$f(x) = x \sin(2x + y^2)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \sin(2x + y^2) + x \cos(2x + y^2) * 2$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = x \cos(2x + y^2) * 2y$$

Regels van afgeleiden

- $\frac{\delta f}{\delta x \delta y} = \text{Eerst } y \text{ differentieren, dan } x.$
- $\frac{\delta f}{\delta y \delta x} = \text{Eerst } x \text{ differentieren, dan } y.$

Stelling van Clairaut

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Raakvlakken van 3D of meerdere variabelen

- $Ax + by + cz = d$ [De functie van alle platte vlakken]
- $Ax + By + C = Z$ [Raakvlak beschrijving vorm]

Raakvlakken en partiele differentiatie

Partiele differentiatie/primitivatie kan worden toegepast om hellingen van raakvlakken te vinden. Op die wijzen kan de algemene som van een raakvlak ook anders geschreven worden. Door de volgende som te gebruiken kunnen we via partiele differentiatie een raakvlak vinden bij een punt voor een functie:

$$Z = f(a, b) + \frac{\delta f}{\delta x}(a, b)(x - a) + \frac{\delta f}{\delta y}(a, b)(y - b)$$

Dit lijkt wellicht op een linearisatie, omdat het dat ook eigenlijk is. Vergeet niet dat die een som is, terwijl als je dit als een linearisatie neemt het een functie wordt/is.

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, geef het raakvlak aan de grafiek met punt $(3, 4, 5)$

$$f(x) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$Z = 5 + \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4)$$

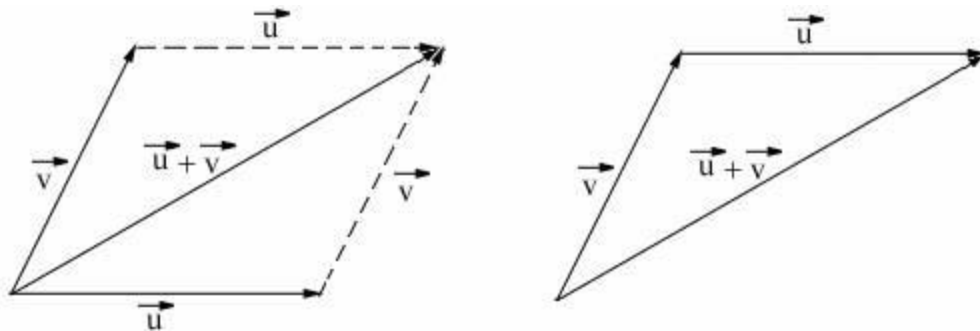
21 – Vectoren, inwendig/dot product

Vectoren

Vectoren zijn niks maar dan lijnen in 3D. Officieel zijn het “pijlen in de ruimte.” Een vector wordt vaak genoteerd of door een **dik** font of door een pijl bovenop de termen.

Sommen van Vectoren

De som van een vector is gewoon de twee vectoren aan elkaar geplakt.



Componenten van Vectoren

Een vector wordt uitgedrukt met een extra coördinaat in vergelijking met 2D lijnen...

$$\mathbf{A} = \langle 1, 2, -3 \rangle$$

- De 1 is de X coördinaat.
- De 2 is de Y coördinaat.
- De -3 is de Z, of de diepte, coördinaat.

Component som van Vectoren

Componenten van Vectoren mogen gewoon, per coördinaat, gesommeerd worden.

- $\mathbf{V} = \langle 1, 2, -3 \rangle$, $\mathbf{W} = \langle 5, -3, 7 \rangle$
- $\mathbf{VW} = \langle 6, -1, 4 \rangle$

Scalar vermenigvuldigen

Een scalar of scala is niks meer dan een wiskundige term voor vectoren zonder richting. Je kan ze normaal vermenigvuldigen.

- $V = \langle 1, 2, -3 \rangle$
- $2V = \langle 2, 4, -6 \rangle$

Norm / Lengte van een Vector

De norm of de lengte van een vector kan gevonden worden door middel van een regel. De notatie is een van de absolute waarde, maar betekent niet de absolute waarde. Let hier op! Neem V uit het vorige voorbeeld:

$$\begin{aligned} |V| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 9} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

Standaardvectoren

Soms wordt er bij de notatie van vectoren een andere vorm gebruikt die ons vectoren laat uitrukken als functies. Hierbij worden deze standaardvectoren gebruikt:

- $I = \langle 1, 0, 0 \rangle$
- $J = \langle 0, 1, 0 \rangle$
- $K = \langle 0, 0, 1 \rangle$

Inwendig product, dot product

Het inwendig/dot product vindt het product van twee vectoren.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Relatie tussen inwendig product en de hoek van een product

Het inproduct heeft een relatie en staat in verhouding tot de hoek tussen twee vectoren. Deze hoek geeft ons ook informatie van de verhoudingen tussen de twee hoeken.

$$a \cdot b = |a||b| \cos(\theta)$$

- De hoek tussen de vectoren is theta.
- Als het inwendig/dot product van a en b 0 is, dan is a loodrecht (90 graden) op b.
- Als de hoek 0 of 180 graden is, dan zijn de vectoren parallel.

$V = \langle 1, 2, -3 \rangle$, $W = \langle 2, -1, 2 \rangle$, Zoek de hoek tussen de vectoren

$$\cos(\theta) = -\frac{6}{3\sqrt{14}} = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$
$$\theta = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

22 – Richtingsafgeleide, Gradient, Minima en Maxima

Richtingsafgeleide

Stel dat de volgende dingen gegeven zijn:

- Een functie die differentieerbaar is.
- Een punt, $P = (P_1, \dots, P_n)$, die in het domein is van F .
- Een vector, $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, met een lengte van $|\mathbf{u}| = 1$.
 - De lengte kan naar 1 gezet worden door te delen met de lengte van de vector.

Dan is de afgeleide van $f(x)$ in punt P en richting $\mathbf{u}$ gegeven door:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(P) * u_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n}$$

$$f(x, y) = 11 - x^2 - y^2, \text{ in } (2, 1), \text{ met een richting van } \langle -1, -2 \rangle$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -1, -2 \rangle$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = -2x = -4$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = -2y = -2$$

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \left(-4 * \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) + \left(-2 * \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

Gradient

Stel, de afgeleide van $f(x)$ in punt P in de richting van vector $\mathbf{V}$ bestaat:

$$D_u f(P) = \nabla f(P) * u, \text{ als } u = \frac{u}{|u|}$$

- De gradient van $|f(P)|$ is de maximale waarde van de richting afgeleide van P .
 - De gradient wordt gegeven als een vector, in de vorm $\langle x, y, z \rangle$
- De vector $\nabla f(P)$ is de richting in P waarin f het sterkst toeneemt.
- Als $D_u f(P) = 0$, dan is de vector $\mathbf{V}$ loodrecht op de gradient.

Maxima en Minima, Hersiaan

- De gradient van een functie = 0 bij een lokale minima of maxima.
 - Dit geeft de zogenoemde “stationaire punten.”
- Het berekenen van de **Hersiaan van P** geeft aan of het een maxima of een minima is:

$$H = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(P) * \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(P) - \left[\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(P) \right]^2$$

- $H < 0 \rightarrow$ Zadelpunt bij P .
- $H > 0$ EN $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(P) > 0 \rightarrow F$ heeft een lokaal maximum in P .
- $H > 0$ EN $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(P) < 0 \rightarrow F$ heeft een lokaal minimum in P .
- $H = 0 \rightarrow$ Onbekend

$$h(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2, \text{ nulpunten } (0,0), (0,4), (2,2), (-2,2)$$

$$\nabla h_x = \langle 6xy - 12x, 3y^2 + 3x^2 - 12y \rangle$$

$$\nabla h_{xx} = \langle 6y - 12, 6y - 12 \rangle$$

$$\nabla h_{xy} = 6x$$

Hersiaan voor $(0,0)$ en $(0,4)$ is 144 en -144, dus lokale maximum en lokale minimum.

Hersiaan voor $(2,2)$ en $(-2, 2)$ zijn negatief, dus zadelpunten.

23 – Integratie met twee variabelen van rechthoeken

Theorie

Integratie is niks meer dan het vinden van een gebied tussen de assen van een grafiek en een functie. Als er meer variabelen zijn, kunnen we dezelfde truc toepassen die we bij differentiatie met meerdere variabelen hebben gebruikt. We zoeken letterlijk de totale “area” tussen de top en de bodem van de variabelen. We splitsen ze hiervoor op, en kijken dan wat we bij elke integratie krijgen.

Notatie en Formule

- Is de functie die je wilt integreren continue? [VOOR DIT VAK ALTIJD]
- Bestaat het limiet naar 0?

$$\iint f(x, y) \Delta A_i$$

Rekenregels

Stel, $f(x)$ en $g(x)$ zijn continue functies, D is de integratie parameter, en C is een constant...

- $\iint f(x, y) + g(x, y) dA = \iint f(x, y) dA + \iint g(x, y) dA$
- $\iint c f(x, y) dA = c \iint f(x, y) dA$
- $\iint 1 dA = \text{Oppervlakte } (D)$

Integratie van rechthoeken

Stel, $R = [a, b] * [c, d]$, en is continue op R :

$$\iint f(x, y) dA = \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y) dy dx$$

- Voor rechthoeken maakt het niet uit in welke volgorde je integreert. Doe de makkelijkste!

$R = [0,2] \times [0,3]$, integreer de functie $f(x,y) = (4-y)$

$$\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^3 (4-y) dy dx$$

$$\left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_0^3$$

$$\int_{x=0}^2 7 \frac{1}{2} dx$$

$$\left[7 \frac{1}{2} x \right]_0^2$$

$$=15$$

24 – Integratie met meerdere variabelen over andere hoeken

Theorie en extra informatie

Integreren over andere hoeken is, per definitie, het zelfde als integratie met een rechte hoek. De verandering is dat dingen zoals domeinen en grafieken nu in de gaten gehouden moeten worden. Zo moet je de R waarde vaak tekenen om de eindjes te vinden van de integraal. De grenzen zijn bij deze integralen niet constant, maar zijn uitgedrukt als variabele. Meer hierover hieronder.

Formule en Uitleg

$$\iint y \, dA, D = \{(x, y), 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

- De grenzen zijn niet meer constant, maar een functie.
- Na Y integratie wordt X $[-1, 1]$.
 - $Y = \sqrt{1 - x^2}$
 - $Y^2 + X^2 = 1$
- Het zoeken van de X grenzen is het lastige van deze vorm van integratie.

$$\int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \, dx$$

$$\int_{x=-1}^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int_{x=-1}^1 \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} dx$$

$$\left[\frac{1}{2} x - \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^1$$

$$\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

Simpele Gebieden en de grenzen

- Type 1:
 - Integraal is “op te delen in verticale strookjes.”
 - $G_1(x) \leq Y \leq G_2(x)$, en $a \leq x \leq b$
 - $\int_{x=a}^b \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$
- Type 2:
 - Integraal is “op te delen in horizontale strookjes.”
 - $H_1(y) \leq X \leq H_2(y)$, en $C \leq y \leq D$
 - $\int_{y=c}^d \int_{x=h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$