



Samenvatting

TI1306 Redeneren & Logica

Samenvatting colleges 2014

Door: David Alderliesten

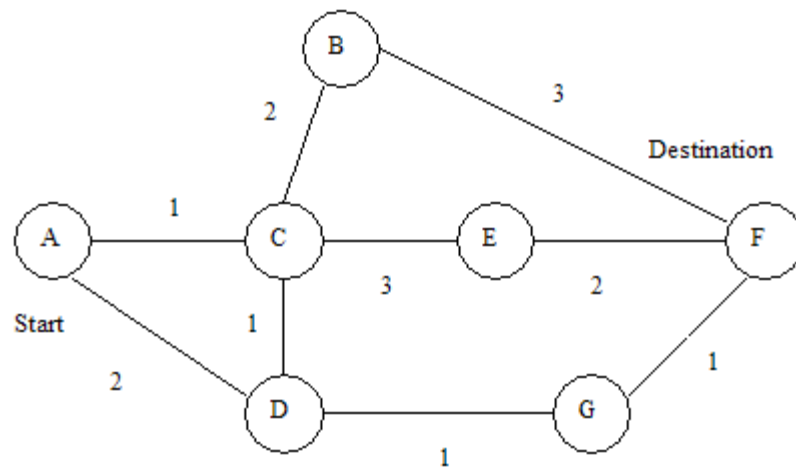
Disclaimer

De informatie in dit document is afkomstig van derden. W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' betracht de grootst mogelijke zorgvuldigheid in de samenstelling van de informatie in dit document, maar garandeert niet dat de informatie in dit document compleet en/of accuraat is, noch aanvaardt W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' enige aansprakelijkheid voor directe of indirecte schade welke is ontstaan door gebruikmaking van de informatie in dit document.

De informatie in dit document wordt slechts voor algemene informatie in dit documentdoeleinden aan bezoekers beschikbaar gesteld. Elk besluit om gebruik te maken van de informatie in dit document is een zelfstandig besluit van de lezer en behoort uitsluitend tot zijn eigen verantwoordelijkheid.

1 – Eerste college, TomTom profcollege, Dijkstra Algorithmme

- Wat is de kortst route van A naar B?
 - We willen van **A naar B**.
 - We rijden over **Wegen**.
 - Van **knooppunt** naar **knooppunt**.
 - Elk wegdeel heeft een afstand (in het algemeen: “kosten”).
 - We willen de **laagste kosten** van A naar B.
- Kan via Dijkstra’s Algoritme (1959)
- Graaf



-
- Lijnen zijn “kanten.”
- Punten zijn “knopen.”

-
- We willen over abstracte informatica-objecten (berekeningsmachines en algoritmen), harde en exacte uitspraken doen waarvan we zeker weten dat ze waar zijn.
 - Logica is de studie van **exact, geldig redeneren**.
 - Redenering is een **verzameling premissen en een conclusie**.
 - De premissen en de conclusie zijn uitspraken die **waar of onwaar** zijn.
 - Voorbeeld:

Premisse 1: als het regent, dan wordt de straat nat.

Premisse 2: Het regent:

Conclusie: De straat is nat.

- Een redenering is **logisch geldig** wanneer de conclusie waar is **als** de premissen waar zijn.

- Logisch geldig als de waarheid van de premissen de waarheid van de conclusie afdwingt.
- Een logisch geldige redenering heet een **stelling**.
- **Suppositioneel redeneren**
 - Het doet niet ter zake of de premissen en de conclusie waar zijn, maar alleen of de conclusie waar is, als de premissen waar zijn.
 - Geldigheid van redenering wordt bepaald door vorm.
 - Eerste premisse: ALS P, DAN Q.
 - Tweede premisse: P
 - Conclusie: Q
- **Formal logic**
 - Logische geldigheid is een eigenschappen van de vorm van een redenering, niet van de inhoud van de redenering.
- Een **tautologie** is altijd waar.
 - “Conclusie: Het is Zaterdag of het is niet Zaterdag.”
- Als een stelling logisch geldig is, dan is er een bewijs die dat aantoonst.
- Als een stelling niet logisch geldig is, dan is er een tegenvoorbeeld.
 - Een situatie waarin de premissen van de redenering waar zijn en de conclusie niet.
- **Deelbaar**
 - Geheel getal B is deelbaar door geheel getal a als er een geheel getal k bestaat zodanig dat $b = k * a$. We zegge dan ook wel: a deel b en schrijven $a \mid b$.
- **Bewijs**
 - Een bewijs is een argumentatie waarin de waarheid van de conclusie van een redenering volgens vastgestelde regels wordt afgeleid uit de waarheid van de premissen van de redenering.
- Einde van bewijs een conclusie gevolgd door QED.

2 – Bewijstechnieken

- Premissen en Conclusie moeten **proposities** zijn: waar of onwaar.
- Vormen van proposities
 - Negatie (niet A)
 - Conjunctie (A en B)
 - Disjunctie (A of B)
- Directe en Indirecte Bewijzen
 - Direct Bewijs
 - “Begin bij de premissen, en redeneer rechtstreeks naar de conclusie toe.”
 - Indirect Bewijs
 - “Begin bij de premissen, en laat zien dat de conclusie niet onwaar kan zijn, door uit de aanname dat de conclusie wel onwaar is, een tegenspraak af te leiden.”

- Stel dat $A|B$ en $B|C$, dan $A|C$.
 - Bewijs:
 - Omdat $A|B$ bestaat er een geheel getal k z.d.d $b = k * a$. Omdat $b|c$ bestaat er een geheel getal l z.d.d $c = l * b$.
 - Te Bewijzen (TB) is dat er een geheel getal M bestaat z.d.d $C = m * a$.
 - $C = l * b = l * k * a$.
 - Omdat l en k geheel zijn is $m = l * k$ een geheel getal waarvoor geldt $C = m * a$.
 - Oftewel, $a | c$.

- Priemgetal bewijs.
 - Definitie priemgetal
 - Een natuurlijk getal > 1 , slechts deelbaar door 1 en zichzelf.
 - 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc.
 - Stelling Euclides
 - “Voor elke verzameling priemgetallen bestaat een priemgetal buiten die verzameling.”

- Bewijs Euclides:
 - Stel dat er eindig veel priemgetallen zijn, zeg n ($p_1, p_2, \dots, p_n$).
 - $X = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n + 1$
 - X is priem
 - Dan mist er een priem getal, omdat er nog een x_{n+1} is.
 - X is niet priem
 - Dan mist er een priem getal, omdat de deelbaarheid altijd een is.
 - Dus mist er een priem getal, dus zijn er oneindig veel priem getallen.

- Conjunctie (... en ...) bewijzen.
 - Stel dat $P_1 \dots P_n$ waar zijn, Dan geldt "C en D."
 - <Leid uit $p_1 \dots p_n$ eerst C en dan D af.>, dus "C en D zijn waar."
- Implicatie (als..., dan ...) bewijzen.
 - De belangrijkste vorm die we moeten kunnen bewijzen is de implicatie, als p dan q.
 - Een implicatie is een uitspraak van de vorm "als, dan."
 - Bewijs Direct
 - Stel dat premissen $p_1 \dots P_n$ waar zijn, dan geldt "als C, dan D."
 - Stel: C. <Leid uit $p_1, \dots, p_n$ EN C af dat D waar is.>, Dan "Als C, dan D" is waar.
 - Bewijs Indirect
 - Stel: "Als C dan D" is niet waar, dus C is waar en D is niet waar.
 - <Leid uit $p_1 \dots p_n$, **C en "niet D"** een tegenspraak af.>
 - "Als c Dan D" kan niet onwaar zijn, dus "Aks C, dan D."
- Implicatie bewijzen door de contrapositie te bewijzen.
 - Implicatie: Als p, Dan Q.
 - Contrapositie: Als niet P, dan niet Q.
 - LET OP, CONVERSE IS NIET HETZELFDE (Als P, dan niet Q).
- Noodzakelijk versus Voldoende
 -

3 - Bewijstechnieken

- Een bi-implicatie bewijzen
 - “Als een implicatie “als p dan q” waar is,
 - Is de contrapositie “als niet q, dan niet p” ook waar, maar
 - Is de converse “als q dan p” **niet per se** waar.
 - Als een implicatie “als p dan q” en de converse “als q dan p” wel allebei waar zijn, dan zijn p en q equivalent.
 - $P \leftrightarrow q$
 - “p iff q”
 - “P desda Q”
 - P dan als q, dat is de implicatie “als q dan p.”
 - En p slechts dan als q, Dus “als niet q dan niet p, oftewel als p dan q”.
 - Een bi-implicatie is waar als beide implicaties waar zijn.
 - Template voor de bi-implicatie
 - We bewijzen beide richtingen van de bi-implicatie:
 - <ALS C DAN D>
 - <ALS D DAN C>
-

- Een disjunctie bewijzen (... of ...)
-

- Equivalentie
 - Als het waar is dat
 - Als A niet waar is, dan B waar
 - Dan equivalentie waar.
-

- Constructief bewijs
 - Laat een geval x zien.
 - Niet-constructief bewijs
 - Laat zien dat de aanname dat zo’n x niet bestaat tot een tegenspraak leidt.
-

- Bewijzen dat voor alle x geldt dat...
 - Bewijs dat uitspraak A geldt voor alle elementen in een groep C:
 - Kleine groep: Laat voor alle elementen van C zien dat A geldt.
 - Grote groep: Redeneer over het **typische** element van C.

4 – Volledige Inductie

- De truc van Gauss
 - Tel de getallen 1t/m 100 bij elkaar op.
 - $1+2+\dots+100$
 - $100 + 99 + \dots + 1$
 - $=101 + 101 + 101$
 - Dus $100 * 101 / 2 = 10100/2 = 5050$.
 - $\sum \frac{n(n+1)}{2}$
 - Sommatie Notatie
 - $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
 - I is vaak een term die staat voor indexatie.
-

OEFEN: Schrijf de som van de eerste n oneven getallen met sommatie notatie.

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1)$$

- Eigenschappen
 - Voorbeelden:
 - Even zijn: $E(2), E(3)$
 - Wit Zijn: $W(\text{amerigo}), W(\text{blackbeauty})$
 - Zanger Zijn: $Z(\text{marcoborsato}), Z(\text{thomas})$
 - Docent zijn van: $T(\text{tomas}, T1305)$
 - Groter zijn dan: $G(2,4), G(2,2)$
- Peano's axioma / natuurlijke getallen
 - 0 is een natuurlijk getal.
 - Elke natuurlijk geval x has een opvolger, $s(x) = x + 1$.
 - Er bestaat geen natuurlijk getal met 0 als opvolger.
 - Als $A \neq B$, dan is $s(a) \neq s(b)$.
 - ALS 0 eigenschap E heeft, EN de opvolger val elk getal ≥ 0 met eigenschap E de eigenschap E ook heeft, DAN hebben ALLE natuurlijke getallen eigenschap E.
 - De verzameling natuurlijke getallen heet N.
 - $N = \{0, 1, 2, 3, \text{etc.}\}$
- Verzamelingen
 - N: Natuurlijke getallen (0, 1, 2, 3)
 - Z: Gehele getallen (-3, -2, 1, 2, etc)
 - Q: Rationale getallen ($a \mid p, q \text{ element } Z, \text{etc.}$)

- Bewijzen met inductie / proof by induction
 - Bewijs laagste getal voor de eigenschap P.
 - Bewijs dan dat alle $n > b$ geldt, dat als getal n eigenschap P heeft, dat getal $n+1$ dat ook heeft.
 - Dan mogen we concluderen dat alle $n > b$ eigenschap P hebben.
- Peano, het inductie algoritme.

Stelling: Voor alle $n \geq 1$ geldt $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.

$P(n)$ bekend $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.

Bewijs: We gebruiken inductie.

Bewijs ($n = 1$): TB: $P(1)$, $\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 1^2$.

$$\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 * 1 - 1 = 1 = 1^2.$$

Inductiestap: TB: Voor alle $n \geq 1$ geldt, als $P(n)$, dan $P(n+1)$. Neem een willekeurig geheel getal ≥ 1 , zeg, k . TB: Als $P(k)$ waar is, dan is $P(k+1)$.

Oftewel, $\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$. TB: $P(k + 1)$

Oftewel, $\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = (k + 1)^2$.

$$\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$$

$$\text{Dus, } \sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) + 2(k + 1) - 1$$

$$\text{Dus, } k^2 + 2k + 2 - 1$$

$$\text{Dus, } k^2 + 2k + 1$$

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Omdat k willekeurig was geldt de implicatie voor alle gehele getallen ≥ 1 . Volgens het inductie axioma geldt $p(n)$ voor alle $n \geq 1$. QED.

5 – Propositielogica

- Predicatenlogica gaat over kwantoren.
- Symbolen
 - Conjunctie $P \wedge Q$ / P en Q
 - Disjunctie $P \vee Q$ / P of Q
 - Implicatie $\rightarrow$
 - Equivalentie $\leftrightarrow$
 - Negatie $\neg P$ / Niet P
- Voorbeeld vertaling
 - “Frans is logicus, maar hij heeft gevoel voor humor.”
 - “Als Delft in Utrecht ligt, dan is 7 een priemgetal.”
 - “Sarah is getrouwen en heeft een baby gekregen.”
 - “Sarah heeft een baby gekregen en is getrouwd.”
 - Die twee zijn identiek.
- Een propositie A is een tautologie desda A niet onwaar kan zijn.
- Een propositie A is een contradictie desda A niet waar kan zijn.
- Een propositie A is een contingentie desda A noch een tautologie noch een contradictie is.
- Twee proposities A en B heten logisch equivalent desda $A \leftrightarrow B$ een tautologie is. We schrijven dan $A = B$ (drie lijnen).

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$\wedge$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	V
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

- Een redenering is logisch geldig als voor de waarheidstafel van alle formules in de redenering geldt:
 - In alle rijen waarin onder all premissen een 1 staat...
 - Een 1 staat maar onder de conclude 0.
- Een dergelijke rij heet een tegenvoorbeeld.

-

6 – Syntaxis van de Propositielogica

- Elke taal ken teen...
 - Syntaxis: wat we opschrijven (alfabet en grammatica).
 - Semantiek: wat we bedoelen.
- Het **alfabet** van P...
 - Propositiesymbolen: $p_0, p_1, p_2, \dots$
 - Connectieven: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
 - Hulpymbolen: “(” en “)”
- Een **grammatica** zegt welke rijen symbolen formules zijn.
 - De verzameling PROP van formules van P is de (kleinste) verzameling rijtjes over het alfabet van P zodanig dat:
 - p_i element van PROP, voor iedere i element van N .
 - Als A, B een element van PROP zijn, dan $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ element van PROP.
 - Dit is een **recursieve definitie** van de verzameling PROP.
- Een indruk van de verzameling PROP...
 - $\text{PROP} = \{p_0, p_1, p_2, \dots, \neg p_0, \neg p_1, \neg p_2, \dots, p_0 \vee p_1, \dots\}$
 - We schrijven p, q, r, s , in de plaats van p_1, p_2 , etc.
 - We schrijven soms geen buitenste haakjes bij complexe termen.
- Een formule wordt geconstrueerd uit subformules.
 - Een formule A is een subformule van F als A voorkomt in de constructie van F .
 - Preciezer... als een van deze drie voorwaarden geldt:
 - $A = F$
 - $F = \neg C$ en A is een subformule van C .
 - $F = (C * D)$ en A is een subformule van C en D .
- Recursieve definitie
 - Een definitie van een functie die de functie zelf aanroept.
 - VB
 - $F(n) = 2^n$
 - Recursief:
 - $F(0) = 1$
 - $F(n) = 2 * f(n-1)$
- Volledige Inductie
 - Bewijstechniek om te bewijzen dat alle elementen van N een bepaalde eigenschap bezitten.
 - Dit werkt omdat het bewijs de structuur van N volgt:
 - N is de kleinste verzameling zodat:
 - ...
- Structurele inductie
 - PROP is de kleinste verzameling van rijtjes symbolen zdd:
 - P een element van PROP,

- Als a, b element van Prop hebben, dan $\neg P$, etc.
- Bewijs
 - Zelfde als inductie, maar dan ook:
 - Geldig voor $E(\neg A)$
 - Geldig voor $E(A * B)$

7 – Metatheorie

- Semantiek van de propositiologica
 - Op systematische wijze waarheidswaarden toekennen aan formules.
 - Ook wel de betekenistheorie.
- Waarheidsfunctionaliteit
 - De waarheidswaarde die formule F krijgt, is slechts afhankelijk van de waarheidswaarden van de propositievariabelen in F.
- Een **valuatie** is een functie over alle propositievariabelen.
 - Oneindig hoeveel functies.
- Waarheidsfuncties
 - Functies die de types uitdrukken.
 - Vorm:
 - $F-(x)$ = Negatie functie van X.
 - $F \rightarrow (x)$ = Implicatie functie van X.
 - Etc.
- De waarheidsfunctie van een formule m.b.t een gegeven valuatie v kan nu recursief worden gedefinieerd als een functie...

$$\text{○ } V : \text{PROP} \rightarrow B, \text{ waar } B = \{0, 1\}$$

$$V(P_i): \quad v(P_i)$$

$$V(-A): \quad f(v(a)) = 1 - v(a)$$

$$v(A*B): \quad f * (v(a), v(b))$$

v met $v(P) = 1$, en $v(q) = 0$. Wat is in $v((-p \rightarrow q))$?

$$\begin{aligned} V((p \rightarrow q)) &= f_{\rightarrow}(v(-p), v(q)) \\ &= f_{\rightarrow}(f(v(p)), v(q)) \\ &= f_{\rightarrow}(f(1), 0) \\ &= f_{\rightarrow}(1-1, 0) \\ &= \max(1-0, 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Model van een formule
 - Een model van een formule A is een valuatie met $v(A)=1$; A is vervulbaar, v vervult A .
- Symboliek
 - $\models$ staat voor tautologie.
 - Staat ook voor volgt uit.
- Metabewering
 - Als $A, B \text{ ELEMENT VAN PROP}$ geldt: als $A \models B$, dan $\models (A \rightarrow B)$.

8 – Boommethode

- De bommethode is een methode waarmee je kunt nagaan of een formule C logisch gevolg is van een verzameling formules I.
- Vervulbaarheid
 - Dat $A_1 \dots A_n$, C vervulbaar of onvervulbaar is, zegt niks.
 - Als $A_1 \dots A_n$, $\neg C$, vervulbaar is, dan is niet geldig.
 - Als $A_1 \dots A_n$, $\neg C$, onvervulbaar is, dan is geldig.
- Vvb = Vervulbaar.
- De boommethode
 - Schrijf alle premissen onder elkaar.
 - Schrijf daaronder de negatie van de conclusie.
 - Herhaal totdat je niet verder kan:
 - Herschrijf de formule x volgens de regels. Disjunctie? Boom in twee delen.
 - Ga steeds voor elke tak na: Is T_x onvervulbaar? Dan sluit de tak!
 - Wanneer kan je niet verder?
 - Als alle formules in takken zijn herschreven tot atomaire formules of de negatie daarvan.
 - Blijft er minstens een tak open? Dan is de redenering niet geldig.
 - Een tegenvoorbeeld is een valuatie die alles in de boom waar maakt.

9 – Natuurlijke Deductie

- Het idee achter natuurlijke deductie is dat C afleidbaar is uit gamma.'
- "Logische gevolg is equivalent uit afleidbaarheid."
- Fitch stijl...
 - Aanneمة worden altijd aangeduid door een lijn onder de functie/aanneمة.
 - Rechts worden regels opgeschreven, met propositiesymbolen.
 - Nummers nodig voor de verantwoordingen aan de rechter kant.
- Afleidingsregels van Fitch
 - Introductie van symbolen: hoe kan een formule met elke connectief worden geconcludeerd?
 - Eliminatie van symbolen: hoe kan een formule met elk connectief worden gebruikt.
- Speciale regels
 - $\wedge$ -intro
 - A en B afleiden, dan $A \wedge B$.
 - $\wedge$ -elim
 - $A \wedge B$, A ($\wedge$ elim)
 - $\rightarrow$ intro
 - A aannemen, B afleiden, $A \rightarrow B$
 - $\rightarrow$ elim
 - A aannemen, B bewijzen.
 - Reiteratie
 - Opnieuw stellen, hypothese gevallen mogen niet gesloten zijn.
 - $\neg$ Intro
 - Aanneمة A, zoek B, zoek $\neg B$, dan $\neg A$.
 - Aanneمة A, leidt $\neg A$ uit.
 - $\neg$ -Eliminatie
 - Dubbele negaties mogen weg.
 - $\vee$ intro
 - Waarheid afleiding van A, mag disjunctie altijd.
 - $\vee$ elim
 - Gevalsonderscheid, als minstens A en/of B waar is, C afleiden. Dan C.

10 – Verzameling leer I

- Context...
 - Eind 19de eeuw ontwikkeld (Georg Cantor, 1845-1918).
 - Fundament van de wiskunde (functie, natuurlijke getallen).
 - Basis voor axiomatisering wiskundige deelgebieden.
 - Intuïtieve of naïeve verzameling leer.
- Verzameling Definitie:
 - “Veelheid beschouwd als een.”
 - “Collectie objecten (elementen) verzameld in een.”
 - Een verzameling is volledig bepaald door zijn elementen.
- Notatie van verzamelingen...
 - Verzamelingen duiden we aan met hoofdletters (E, K, etc.).
 - Elementen worden gescheiden door komma's {0, 1}, en omgeven door accolades.
 - De volgorde van opschrijven doet er niet toe.
 - Een object kan maar een keer in een verzameling zitten ({0, 0, 1} mag niet).
 - We gebruiken puntjes als dat nodig is ($V = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$).
- Lidmaatschap (membership) notatie:
 - Object a is element of lid van verzameling B: a element van B
 - Object c is geen element van A: c is / element van B.
 - De cardinaliteit van een verzameling is het aantal elementen: $|A|$.
- Verzamelingen specificeren:
 - Opsommen...
 - $B = \{0, 1\}$. $V = \{0, 1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$
 - Beschrijven...
 - $V = \{x \mid x \text{ is een priemgetal} \wedge x < 10\}$
 - “V is een verzameling van alle waarvoor geldt dat x een priemgetal is, en kleiner dan of gelijk aan 10 is.” (**Set-builder notatie**).
 - Een verzameling kan een verzameling van verzamelingen zijn.
- De lege verzameling
 - De verzameling zonder elementen heet de lege verzameling.
 - Notatie is een 0 met een streep erdoor.
- Deelverzameling, subset:
 - Verzameling A is een deelverzameling van verzameling B, als alle elementen van A ook elementen van B zijn.
- Strikte deelverzameling
 - Verzameling A is een strikte deelverzameling van B, A deelverz. B, als A deelvermetstreep B, en $A \neq B$.
- Eigenschappen van inclusie...
 - Zij A, B, en C zijn verzamelingen. Dan geldt:
 - A element van A.
 - A element van B, en B element van A, dan $A = B$.
 - A element van B, en B element van C, dan A element van C.

- Gelijkheid van verzamelingen.
 - Twee verzamelingen A en B zijn gelijk, $A = B$, wanneer ze dezelfde elementen hebben.
 - $A = B$ als voor alle x : x element van A desda x element van B.
 - $A = B$ als voor alle x : $(x \text{ element van } A \rightarrow x \text{ element van } B) \wedge (x \text{ element van } B \rightarrow x \text{ element van } A)$.
 - $A = B$ als: $(A \text{ verzameling } B) \wedge (B \text{ verzameling } A)$.
- Het universum
 - Comprehensieprincipe = Eigenschappen definiëren verzamelingen.
 - Voor elke eigenschap P bestaat de verzameling van alle dingen et eigenschap P (naïef).
 - Vereniging
 - De vereniging van verzamelingen A en B, $A \cup B$, is de verzameling $\{x \text{ element van } U \mid x \text{ element van } A \vee x \text{ element van } B\}$.
 - Kan gevonden worden aan de hand van de Venn diagram.
 - Doorsnede
 - De doorsnede van verzamelingen A en B, $A \cap B$, is de verzameling $\{x \text{ element van } U \mid x \text{ element van } A \wedge x \text{ element van } B\}$.
 - Verschil
 - Het verschil van verzameling A en B, $A - B$, is de verzameling $\{x \text{ element van } U \mid x \text{ element van } A \wedge x \text{ niet element van } B\}$.
 - Symmetrisch Verschil
 - Het symmetrisch verschil van verzamelingen A en B, $A \Delta B$ / $A \text{ xor } B$.
 - Complement
 - Het complement van een verzameling A, A^c , A met een streepje, is de verzameling $\{x \text{ element van } U, x \text{ niet een element van } A\}$.

11 – Verzamelingenleer II

- Stellingen over gelijkheid van verzamelingen.
 - $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
 - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
 - $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
- Een complement correspondeert met een negatie.
- De machtsverzameling
 - De machtsverzameling (“powerset”) van een verzameling A is de **verzameling van alle deelverzamelingen van A**.
 - We schrijven 2^A , gedefinieerd als: $2^A =_{\text{def}} \{X \mid X \subseteq A\}$
 - Soms ook als $P(A)$ – voor powerset van A.
- Cartesisch product
 - We zouden de wiskunde opbouwen op de verzamelingenleer.
 - Deelbaarheid is een eigenschap die sommige paren getallen hebben, dus een relatie die voor alle paren getallen wel of niet geldt.
 - Bij verzamelingen geldt: $\{a, b\} = \{b, a\}$.
 - In een geordent paar is de volgorde van belang:
 - $(a, b) = (c, d)$ desda $c = a$ en $d = b$.
 - Dus $(a, b) \neq (b, a)$ waneer $a \neq b$.
 - Cartesisch product $A \times B$ van verzamelingen A en B is de verzameling van geordende paren zodat x een element van A en y een element van B is.
 - $A \times B = \{(x, y) \mid x \text{ element van A en } y \text{ element van B}\}$.
- Eigenschap
 - Een eigenschap van element van A is gedefinieerd als de deelverzameling van A die de objecten met de eigenschap bevat.
 - De notatie kan als $E(a)$ of $G(b, c)$, als E en G eigenschappen zijn.
 - Even zijn.
 - Groter zijn.
- Relaties zijn n-plaatsig
 - 1-plaatsig: unair.
 - 2-plaatsig: binair.
 - 3-plaatsig: ternair.
 - 4-plaatsig: quaternair.

12 – Veramelingenleer, Predicatenlogica

- Functies zijn speciale relaties.
 - Voor elke input x is er precies een y waarmee x in de relatie zit.
 - $F: A \rightarrow B$.
 - F is een functie van domein A naar codomein B .
- Predicatenlogica is een taal waarmee we de interne structuur van proposities kunnen analyseren.
 - We zien allerlei **categorieën** van concepten in onze uitspraken.
 - Socrates
 - Getallen
 - Formules in PROP.
 - Etc.
 - Syntaxis...
 - Namen: $c_0, c_1, \dots$
 - We schrijven vaak a of b (of 0 , of s voor Socrates).
 - Kleiner letters, begin alfabet.
 - Variabelen:
 - Eigenschappen (predicaten)
 - We redeneren over eigenschappen van objecten:
 - Deelbaarheid.
 - Even of Oneven.
 - Priemgetal.
 - Palindroom.
 - Sterfelijk.
 - Etc.
 - Predicaatsymbolen
 - $P_0, P_1, \dots$
 - Hoofdletters.
 - Functies
 - We redeneren met en over functies.
- Alfabet van een eerste-ordetaal
 - Een eerste-ordetaal wordt ontworpen per toepassing door niet-logisch symbolen te kiezen.

13 – Predicatenlogica, Vertalen

- Vertalen
 - Vertalen van kennis in predicaatlogische formules maakt dat je over die kennis (automatisch) kunt redeneren.
- Syntaxis
 - In een eerste-ordetaal onderscheidt men **twee syntactische categorieën**: *termen en formules*.
- TERM
 - De verzameling termen TERM is de kleinste verzameling zodanig dat:
 - Alle variabelen x_i termen zijn (i element van N), $VAR = \{x_i \mid i \text{ element van } N\}$.
 - Alle namen c_i termen zijn (i element van N).
 - Als F een n -plaatsig functiesymbool is en $t_1, \dots, t_n$ termen, ook $f(t_1, \dots, t_n)$ een term is.
- Grammatica: 2 typen 'dingen' zijn van belang.
 - De verzameling FORM is de kleinste verzameling zodanig dat:
 - Als P_i een n -plaatsig predicaatsymbool is en $t_1, \dots, t_n$ termen zijn $P(t_1, \dots, t_n)$ een formule is.
 - Als t_1 en t_2 termen zijn $(t_1 = t_2)$ een formule is.
 - Als a en b formules zijn, $\neg a$ en $(a * b)$ formules zijn.
 - Als a een formule is en x een variabele, $\text{kwantor} x A$, $\text{element} x A$ formules zijn.
 - Formules van type 1 en 2 heten atomen (verzameling ATOM).
- Ontledingsbomen
 - Kwantoren komen per knoop altijd samen voor.
 - Voor alle X hoort bij elkaar.
 - Atomen komen alleen samen voor.
- Echte subformules
 - Er komt een regel bij voor de subformules.
 - $F = QxC$ en A is een subformule van C .

15 – Boommethode en Semantiek

- Bij de boommethode voor predicaten is de n-regel belangrijk, omdat deze gemanipuleerd kan worden om waarheden en tegenvoorbeelden te elimineren.
- Tegenvoorbeelden van de boommethode opschrijven...
 - $B = \langle D; R_0, R_1; d_0 \rangle$
 - $D = \{ d_0 \}$
 - $R_0 = P^B$