

1. Laat S een verzameling zijn.
 - (4) a. Vul de volgende definitie aan: een verzameling $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S)$ heet een σ -algebra als
Laat I een indexverzameling zijn en neem aan dat voor elke $i \in I$, $\mathcal{A}_i$ een σ -algebra op S is.
 - (6) b. Toon aan dat $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ een σ -algebra is.
2. Laat λ de Lebesgue maat zijn op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ gegeven zijn door $f(x) = e^{-x^2} \sin^2(x)$.
 - (7) a. Bewijs dat f integreerbaar is.
Definieer $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ door $\nu(B) = \int_B f \, d\lambda$.
 - (8) b. Toon aan dat ν een maat is op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
 - (10) c. Laat $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ een meetbare functie zijn. Toon aan dat $\int_{\mathbb{R}} g \, d\nu = \int_{\mathbb{R}} g f \, d\lambda$.
Hint: Doe dit eerst voor simpele functies $g : S \rightarrow [0, \infty)$.
3. Laat $(S, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte zijn.
 - (6) a. Laat $(A_n)_{n \geq 1}$ een rij verzamelingen in $\mathcal{A}$ zijn. Toon aan dat $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$.
Laat voor elke $n \geq 1$, $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ een meetbare functie zijn. Neem aan dat $N \in \mathcal{A}$ bestaat zó dat $\mu(N) = 0$ en $f_n \rightarrow 0$ puntgewijs op N^c . Voor elke $n, j \geq 1$ definieer $A_{n,j} = \bigcup_{m \geq n} \{s \in S : |f_m(s)| \geq 1/j\}$.
 - (6) b. Bewijs dat voor elke $j \geq 1$ geldt dat $\mu\left(\bigcap_{n \geq 1} A_{n,j}\right) = 0$.
Neem vanaf nu aan dat $\mu(S) < \infty$ en laat $\varepsilon > 0$.
 - (6) c. Toon aan dat voor elke $j \geq 1$ er een n_j bestaat zó dat $\mu(A_{n_j,j}) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$.
Hint: Gebruik een handige stelling uit het dictaat voor dalende rijen verzamelingen.
Laat $B := \bigcup_{j \geq 1} A_{n_j,j}$ waarbij n_j zo gekozen is als in (c).
 - (6) d. Toon aan dat $\mu(B) \leq \varepsilon$ en leg uit waarom $f_n \rightarrow 0$ uniform op B^c .
- (20) 4. Formuleer en bewijs de gedomineerde-convergentiestelling.
5. Laat $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $f(x) = \mathbf{1}_{[\pi, 2\pi)}(x)$.
 - (3) a. Bereken de $L^2(0, 2\pi)$ -norm van f .
 - (4) b. Toon aan $s_n(f) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ (de n -de partiële som van de Fourierreeks van f) gegeven wordt door $s_n(f) = \sum_{|k| \leq n} c_k e_k$ met $c_0 = 1/2$, $c_k = 0$ als $k \neq 0$ even is, en $c_k = \frac{i}{\pi k}$ als k oneven is.
 - (4) c. Bereken $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ met behulp van (a), (b) en Parseval's identiteit.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.

EINDE
1