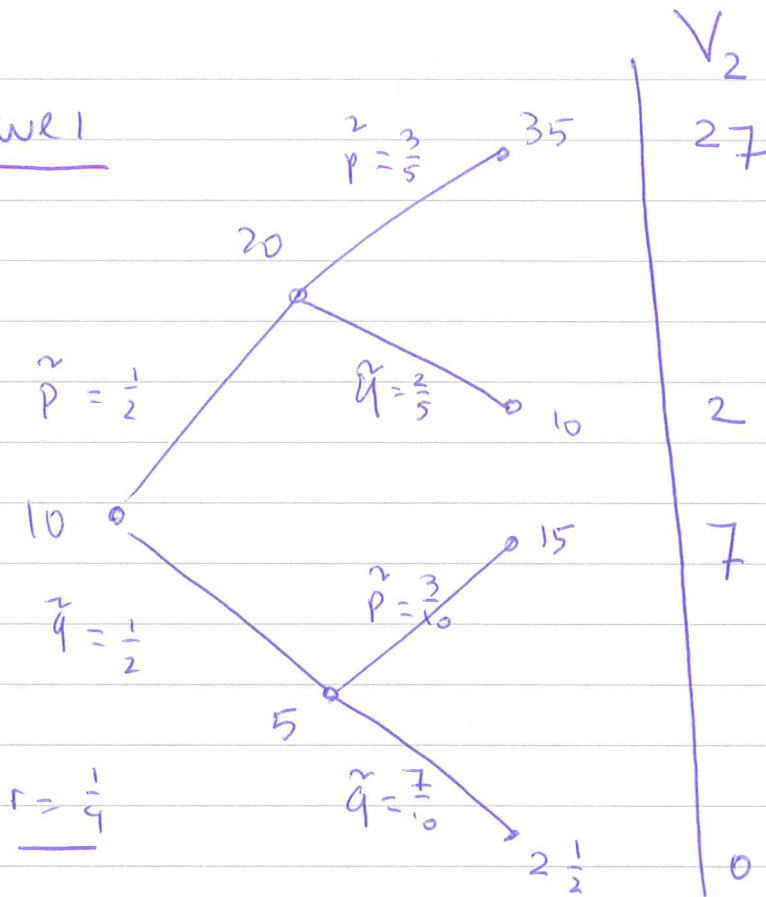


UITWERKING

①

opgave 1



$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$$

$$\tilde{q} = \frac{u-r-d}{u-d}$$

$$\tilde{p}(H) = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\tilde{p}(T) = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{10}$$

$$A: V_0 = \tilde{H} \left[\frac{V_2}{(1+r)^2} \right] = \frac{16}{25} \tilde{H} [V_2]$$

$$= \frac{16}{25} \left(27 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 7 \cdot \frac{3}{20} \right)$$

$$= \frac{764}{125} \approx 6.11$$

$$B: \Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{13.6 - 1.68}{15} \approx 0.79$$

Het portfolio bestaat uit 0.79 aandelen, op de bank staat $6.11 - 0.79 \times 10 = -1.69$ euro (dit laatste ging vaak mis, lees V_b in het boek!)

opgave 2 A M_n is martingaal als $\mathbb{E}_n[M_{n+1}] = M_n$

Nu is M_5 constant, dus zijn voorwaardelijke verwachting $M_4 = \mathbb{E}_4[M_5]$ is dat ook, enz. De

rij $M_5, M_4, M_3, M_2, M_1, M_0$ is constant.

B (voor de rijs!) Kwadrateren verliest informatie.

Tegenvoorbeeld van een rij $X_1, X_2, X_3, \dots$ die Markov is, maar de kwadraten zijn dat niet.

Gooi met een munt. Als het H is, zet dan

$X_1 = X_2 = X_3 = \dots$ allemaal 1. Als het T is zet

dan $X_1 = -1$ maar $X_2 = 0$ en $X_3 = -1$ en $X_4 = 0$ enz

De rij stochasten is dan $-1, 0, -1, 0, -1, \dots$

Deze rij is Markov: $\mathbb{E}_n[f(X_{n+1})] = f(X_n)$ als

$X_n = 1$ en $f(X_{n+1})$ als $X_n = -1$ en $f(X_n - 1)$

als $X_n = 0$. Definieer dan $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x = 1 \\ f(x+1) & \text{als } x = -1 \\ f(x-1) & \text{als } x = 0 \end{cases}$

Dit is een keurige functie.

De rij kwadraten is duswel $1, 1, 1, \dots$ duswel $1, 0, 1, \dots$

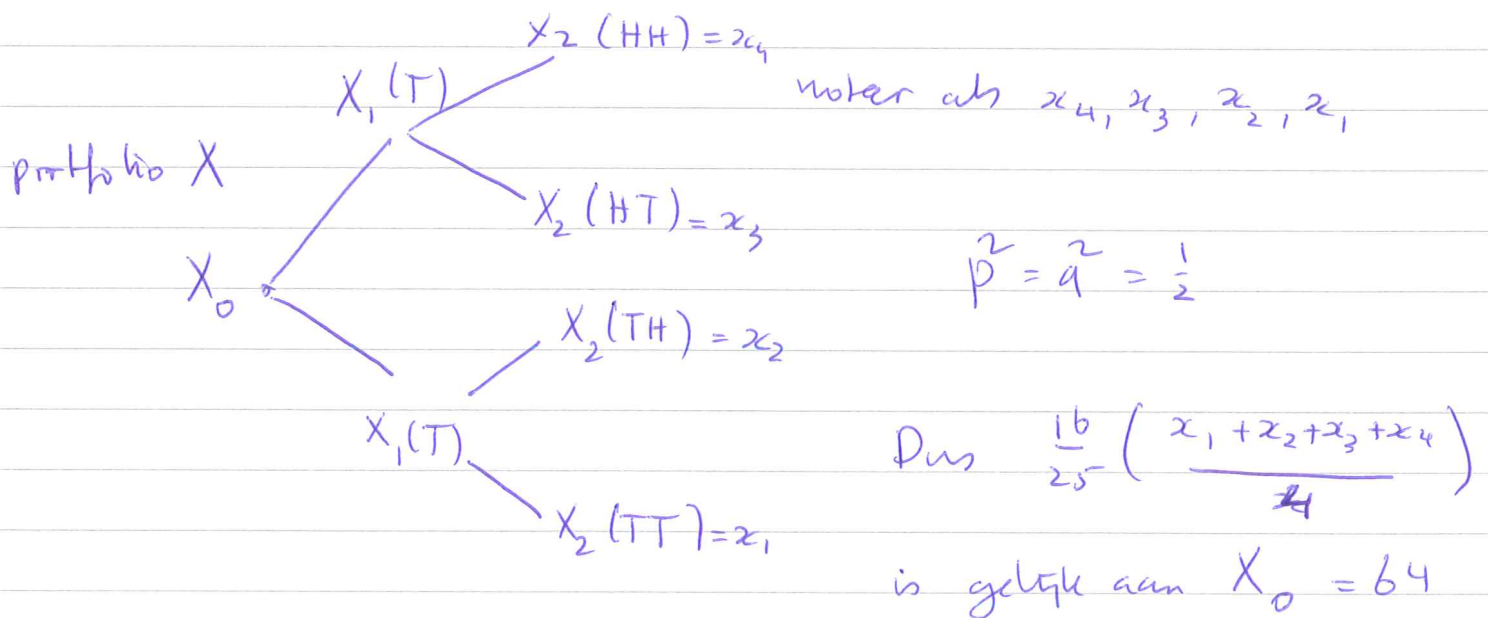
Nu is $\mathbb{E}_1[Y_2](H) = 1$ want $Y_2(HT) = Y_2(HH) = 1$

en $\mathbb{E}_2[Y_2](T) = 0$ want $Y_2(TH) = Y_2(TT) = 1$.

Echter Y_1 is constant, dus $g(Y_1)$ ook. De voorwaardelijke verwachting is niet constant. Tegenspraak.

opgave 3

Een portfolio is na verdisconteren martingaal onder risiconeutrale kanser



$$\frac{16}{25} \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \right) = 64 \quad \text{dus} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 400$$

Dit is onze constraint, optimaliseren we $\mathbb{E}[U(X)]$

(4)

De verwachte utility is $\frac{9}{16}\sqrt{x_4} + \frac{3}{16}\sqrt{x_3} + \frac{3}{16}\sqrt{x_2} + \frac{1}{16}\sqrt{x_1}$

Lagrangiaan: $\left(\frac{9}{16}\sqrt{x_4} + \frac{3}{16}\sqrt{x_3} + \frac{3}{16}\sqrt{x_2} + \frac{1}{16}\sqrt{x_1} \right)$

$$- \lambda (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 400)$$

Differentieer naar x_1, x_2, x_3, x_4 (λ is het prikd van de bouwman)

$$\frac{9}{32} \frac{1}{\sqrt{x_4}} - \lambda = \frac{3}{32} \frac{1}{\sqrt{x_3}} - \lambda = \frac{3}{32} \frac{1}{\sqrt{x_2}} - \lambda = \frac{1}{32} \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \lambda = 0$$

Daar $\frac{9}{32} \frac{1}{\sqrt{x_4}} = \frac{3}{32} \frac{1}{\sqrt{x_3}} = \frac{3}{32} \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{32} \frac{1}{\sqrt{x_1}}$ kwadrateer:

$$\frac{81}{x_4} = \frac{9}{x_3} = \frac{9}{x_2} = \frac{1}{x_1} \quad \text{daar } x_4 = 81x_1 = 9x_2 = 9x_3$$

Constraint: $81x_1 + 9x_1 + 9x_1 + x_1 = 400$ daer $x_1 = 4$

Verwachte utility is $\frac{200}{16} = 12\frac{1}{2}$

B Om Δ_0 te berekenen moeten we $X_1(H)$ en $X_1(T)$ bepalen.

5

$$X_1(H) = \mathbb{E}_1 \left[\frac{X_2}{1+r} \right] (H) = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4 \right)$$

en $X_1(T)$ is idem $\frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right)$

dan $X_1(H) = 144^{\frac{1}{2}}$ en $X_1(T) = 16$, het volgt

dat $\Delta_0 = \frac{64}{3}$