Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, 2628 CD DELFT

TU Delft

tentamen Analyse (deel 1) – wi 1 005 In, dl. 1
25 januari 2010, 09.00–11.00 uur

Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.

Alleen het **formuleblad** *van het* instellingspakket *en een* **rekenmachine** *mogen worden gebruikt.*
Onderling contact, communicatieapparatuur, boeken en aantekeningen zijn **niet** *toegestaan.*

Elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie te worden voorzien.

Tenzij anders gevraagd worden exacte *antwoorden verlangd.*

1. a) Toon aan dat voor alle waarden van $x > 1$ geldt: $\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \arcsin\frac{1}{x}$. 8

   b) De betrekking kan worden uitgebreid met een soortgelijke uitdrukking waarin een arccos voorkomt; vind deze. *Aanwijzing*: teken een driehoek. 4

   c) Differentieer $\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ naar x. 6

2. Vind een vergelijking van de raaklijn in het punt $P = (\frac{\pi}{2}, 0)$ aan de kromme gegeven door $x\cos y + y\sin x = \frac{\pi}{2}$. 10

3. a) Bepaal $\displaystyle\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$. 8

   b) Bereken, zo mogelijk, $\displaystyle\int_{-\frac{4}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$. 4

4. Bereken $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$. 10

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking $y' = x\,\mathrm{e}^{-\sin x} - y\cos x$.

   a) Ga na of de differentiaalvergelijking separabel is. 2

   b) Ga na of de differentiaalvergelijking lineair is. 2

   c) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking. 10

   d) Schets in het bijgeleverde richtingsveld de oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarde $y(\frac{\pi}{2}) = 0$. *De oplossing berekenen hoeft niet.* 4

6. a) Gegeven is de vierkantsvergelijking $z^2 + (-4+i)\,z + 5\,(1-i) = 0$. Laat zien dat $1-2i$ een van de wortels (oplossingen) is. 6

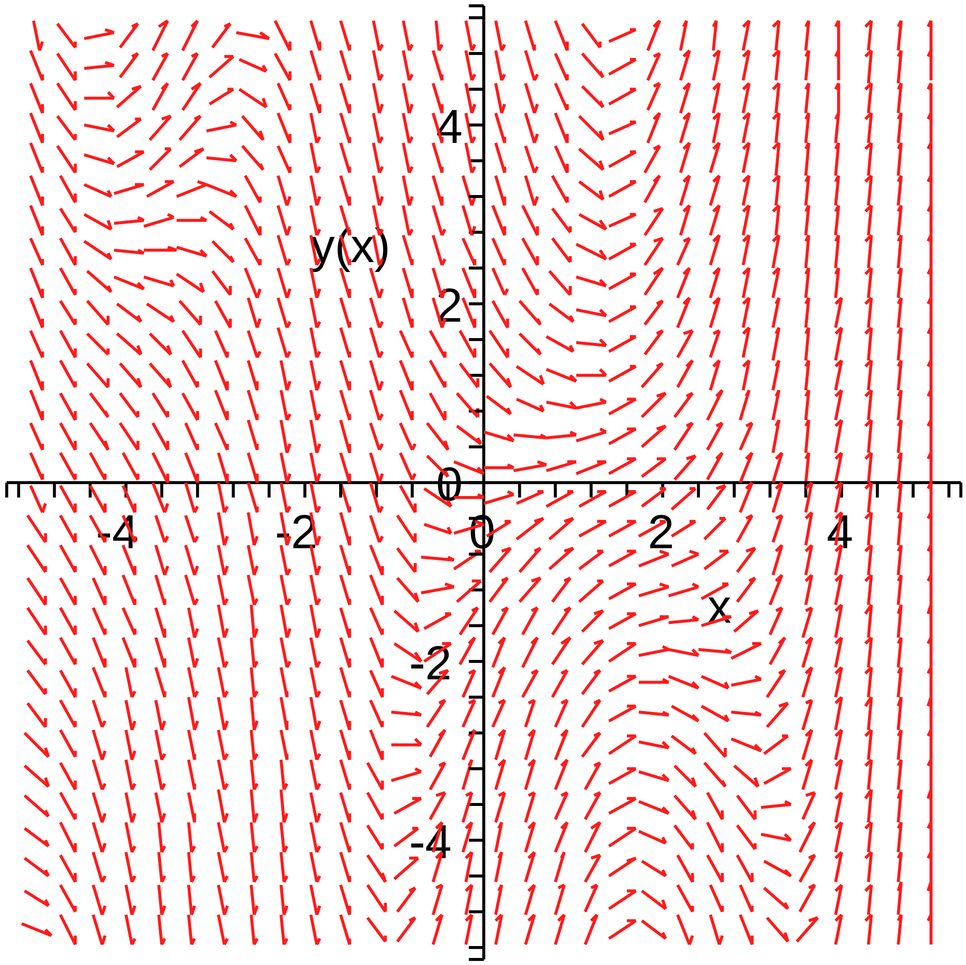
   b) Bereken de discriminant van de gegeven vierkantsvergelijking. 4

7. Gegeven is de differentiaalvergelijking $y'' - 2y' + 5y = 2\,\mathrm{e}^x\cos(2x)$.

   a) Bepaal daarvan de gereduceerde (*homogene*) oplossing y_h. 8

   b) Geef de algemene gedaante die je als *particuliere* oplossing y_p moet kiezen. 4

Dit waren alle sommen. Het is de bedoeling dat je de uitwerking van som 5^{d} maakt op het apart uitgedeelde vel met daarop alleen een tekening. De tekening staat ook hieronder. *Lever het losse vel in* (en vergeet niet je naam en studienummer daarop te zetten).



Normering

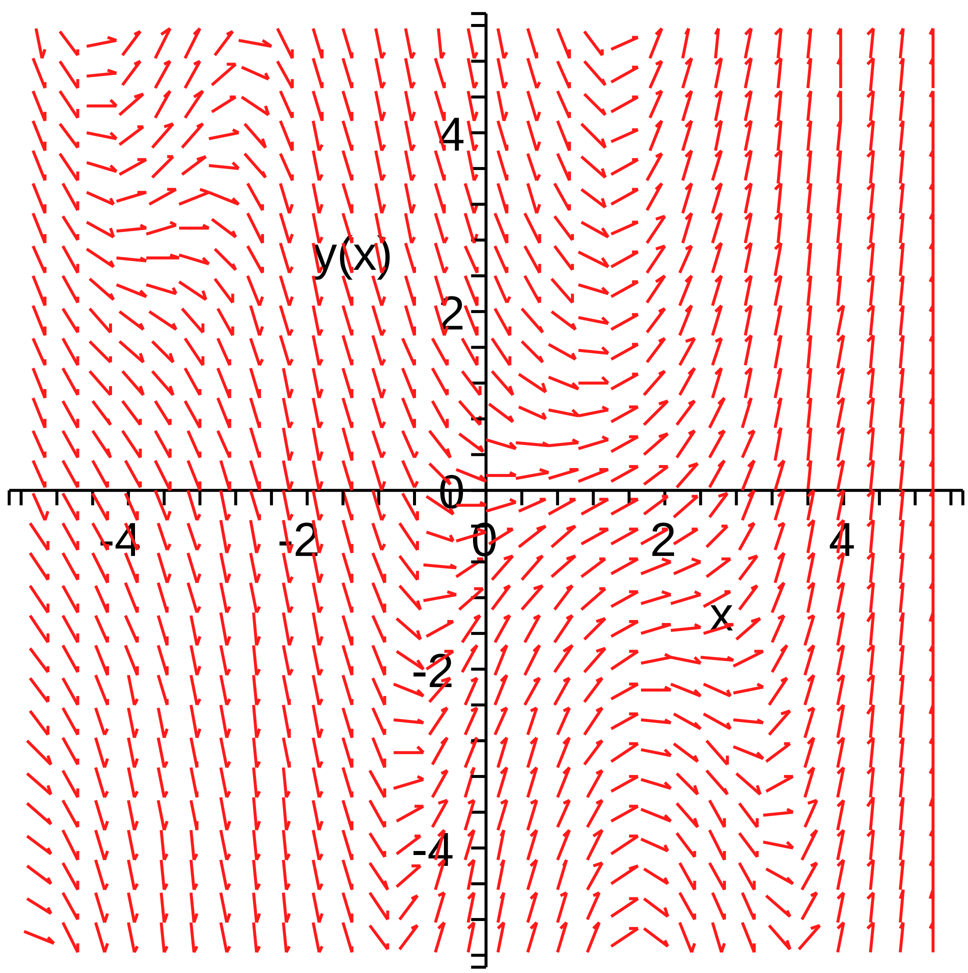
Elk onderdeel levert maximaal het aantal in de kantlijn vermelde punten op.
Als t het aantal toegekende punten is is het cijfer $c = \frac{t}{10}$ $(c \in \mathbb{N})$. 10

Naam:	St.nr.:	5^d

tentamen Analyse (deel 1) – wi 1 005 In, dl. 1
25 januari 2010, 09.00–11.00 uur

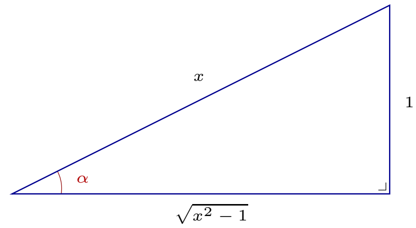
Dit vel is bedoeld ter beantwoording van vraag 5^d. Deze vraag wordt hier herhaald.

Schets in het bijgeleverde richtingsveld de oplossing die voldoet
aan de beginvoorwaarde $y(\frac{\pi}{2}) = 0$. 4



Teken bij voorkeur met een constrasterende kleur!

1. a) Noemen we $\arctan \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \alpha$, dan kunnen we α in een rechthoekige driehoek weergeven, en wel aldus (*zie* figuur): laat α een der scherpe hoeken zijn, geef de overstaande zijde als lengte 1, en de aanliggende zijde lengte $\sqrt{x^2-1}$; de lengte van de hypothenusa is dan x, en $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.



In de figuur zien we: $\sin\alpha = \frac{1}{x} \overset{-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}}{\Longrightarrow} \alpha = \arcsin\frac{1}{x}$: de betrekking geldt. 8

Opmerking: de laatste stap mag worden gemaakt, omdat de functies arctan en arcsin eenzelfde bereik hebben, èn $x > 1 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \Longrightarrow \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

[of:] Het bewijzen van de betrekking met behulp van goniometrische formules is mogelijk maar niet aantrekkelijk.[1]

[of:] De volgende aanpak is ook correct (zij het omslachtig): differentieer beide uitdrukkingen naar x; de uitkomsten zijn gelijk. Dat betekent dat de beide gegeven uitdrukkingen als primitieven van de gevonden afgeleiden op een additieve constante na gelijk zijn. Invullen van bijvoorbeeld $x = 2$ laat zien dat die constante 0 bedraagt.

b) In de figuur lezen we af dat $\cos\alpha = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

c) Uit de bewezen betrekking volgt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arcsin\frac{1}{x}\right) \overset{\text{kettingregel}}{=}$
$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 6

[of:] Ineens: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) \overset{\text{kettingregel}}{=} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)' = \frac{x^2-1}{x^2-1+1} \cdot \frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} =$
$-\frac{(x^2-1)\,x}{x^2\,(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2. Behandel y als functie van x en differentieer beide zijden van de vergelijking $x\cos y + y\sin x = \frac{\pi}{2}$ impliciet naar x (gebruik ketting- èn productregel); aldus:

$$\cos(y(x)) - x\sin(y(x)) \cdot y' + y'\sin x + y(x)\cdot\cos x = 0\,.$$

Hierin $x = \frac{\pi}{2}$ en $y = 0$ invullen: $\cos 0 - \frac{\pi}{2}\sin 0 \cdot y' + y'\sin\frac{\pi}{2} + 0\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Longleftrightarrow$
$1 + y' = 0 \Longrightarrow y'(\frac{\pi}{2}) = -1$. 10

[of:] Eerst een algemene uitdrukking vinden voor y' kan ook: hergroeperen levert $\cos(y) + y\cos x = (x\sin(y)\cdot - \sin x)\,y' \overset{\text{noemer}\neq 0}{\Longleftrightarrow} y' = \frac{\cos y + y\cos x}{x\sin y - \sin x}$, en nu invullen.

De gevraagde raaklijn is de rechte door het punt P met richtingscoëfficiënt -1, dus: $y - 0 = -1\,(x - \frac{\pi}{2}) \Longleftrightarrow x + y = \frac{\pi}{2}$.

N.B. Het punt P ligt inderdaad zowel op de kromme als op de raaklijn. *Zie* ook de bijgeleverde figuur.

$\longrightarrow$

3. a) Substitueer $u = \frac{1}{x} \Longrightarrow \mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ als nieuwe variabele; de integraal wordt: 8

$$\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int -\sin u\;\mathrm{d}u = \cos u = \cos\tfrac{1}{x} + C\,.$$

b) De integraal is oneigenlijk in 0 en moet worden opgesplitst.

$$\int_0^{\frac{3}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\left[\cos\tfrac{1}{x}\right]_a^{\frac{3}{\pi}} = \cos\frac{\pi}{3} - \lim_{a\to 0+}\cos\frac{1}{a} \text{ is divergent}^2.$$ 4

De gegeven integraal $\displaystyle\int_{\frac{3}{\pi}}^{-\frac{4}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ is dus divergent.

4. We berekenen eerst met behulp van partiële integratie een primitieve:

$$\int \underbrace{x^2}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\tfrac{1}{3}x^3}_{u}\cdot\underbrace{\ln x}_{v} - \int \underbrace{\tfrac{1}{3}x^3}_{u}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{v'}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\,x^3\,\ln x - \tfrac{1}{9}\,x^3 = \tfrac{1}{9}\,x^3\,(3\ln x - 1)\,.$$ 10

We vinden $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\,\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}\,x^3\,\ln x - \tfrac{1}{9}\,x^3\right]_1^{\mathrm{e}} = \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \tfrac{1}{9}\mathrm{e}^3 - 0 + \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{9}\,(2\mathrm{e}^3+1)\,.$

5. a) De differentiaalvergelijking is niet te schrijven als $y' = \frac{g(x)}{h(y)}$: niet separabel. 2

b) $y' = x\,\mathrm{e}^{-\sin x} - y\,\cos x \Longleftrightarrow y' + \cos x\,y = x\,\mathrm{e}^{-\sin x}$ (standaard schrijfwijze) doet inzien dat de differentiaalvergelijking wel lineair is. 2

c) De zoektocht naar een integrerende factor levert $I(x) = \mathrm{e}^{\int\cos x\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\sin x}$; 10

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}\int I(x)\,x\,\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\left(\int x\,\mathrm{d}x\right) = \left(\tfrac{1}{2}x^2 + C\right)\,\mathrm{e}^{-\sin x}\,.$$

d) De oplossing met $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ is weergegeven in de figuur (de kromme gaat door het punt $\frac{\pi}{2}, 0)$ en volgt het richtingsveld). 4

[of:] *Toegift*: invullen van $\frac{\pi}{2}$ in de algemene oplossing geeft $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + C\right)\,\mathrm{e}^{-1}$; dit is 0 als $C = -\frac{\pi^2}{8}$. De integraalkromme is de grafiek van $\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)\,\mathrm{e}^{-\sin x}$.

Opmerking: dit vraagstuk is gebaseerd op Stewart, 6th ed., § 9.R, 5).

6. a) We vullen de kandidaat-wortel in in de gegeven vierkantsvergelijking:

$(1-2i)^2 + (-4+i)\,(1-2i) + 5\,(1-i) = (1-4i+4i^2) + (-4+8i+i-2i^2) + (5-5i) =$ 6
$(1-4\,+\,-4+2\,+\,5) + (-4i\,+\,8i+i\,-\,5i) = 0 + 0i = 0$ — inderdaad!

b) Met $a = 1\;\; b = -4+i\;\; c = 5-5i$ is de discriminant

$D = b^2 - 4ac = (-4+i)^2 - 4\cdot 1\cdot(5-5i) = 16 - 8i - 1 - 20 + 20i = -5 + 12i\,.$ 4

$\boxed{\longrightarrow}$

[1] $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = 1 - \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2-1}} = 1 - \frac{x^2-1}{x^2-1+1} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

[2] want $\frac{1}{a}$ gaat naar ∞ en de $\cos$ blijft slingeren tussen -1 en 1

Opmerking: een vierkantsvergelijking oplossen gaat door kwadraatafsplitsen; het resultaat is dat $z = \frac{-b \pm w}{2a}$ met $w^2 = D = -5 + 12i$; w volgt door oplossen van $w^2 = -5 + 12i$ (binomiaalvergelijking).

De methode waarbij de modulus en het argument van het rechterlid nodig zijn werkt hier niet naar behoren, omdat weliswaar $|-5+12i| = 13$ eenvoudig te bepalen is, maar $\arg(-5+12i)$ niet beter te schrijven is dan als $\arccos(-\frac{5}{13})$ (in het tweede kwadrant!).

Vervolgens zijn uitdrukkingen voor $\sin\frac{\vartheta}{2}$ en $\cos\frac{\vartheta}{2}$ nodig met $\vartheta = \arccos(-\frac{5}{13})$.

Een vierkantsvergelijking met wortels z_1 en z_2 kan worden ontbonden als $(z-z_1)\,(z-z_2)$, en z_2 kan worden gevonden door de kwadratische veelterm door $z - z_1$ te delen[3]. Of: breng $z - z_1 = z - 1 + 2i$ buiten haakjes: 4

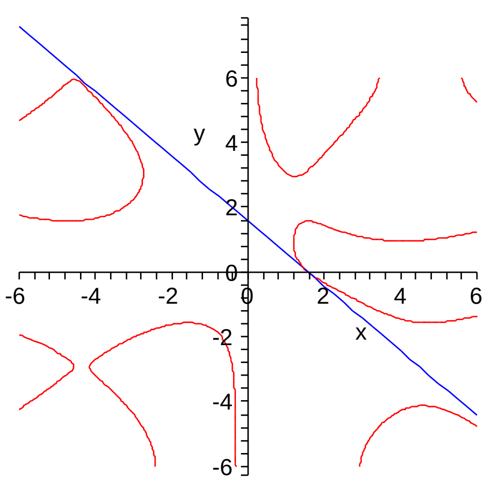
$$z^2+(-4+i)\,z+5-5i = z\cdot(z-1+2i)+(z-2iz)+(-4z+iz)+(5-5i) =$$
$$z\cdot(z-1+2i)+-3z-iz+(5-5i) = z\cdot(z-1+2i)-(3+i)z+(5-5i) =$$
$$z\cdot(z-1+2i)-(3+i)\,(z-1+2i)+(-3-i+6i-2)+(5-5i) =$$
$$(z-(3+i))\,(z-1+2i)\,.$$

De andere wortel moet dus $3+i$ zijn.

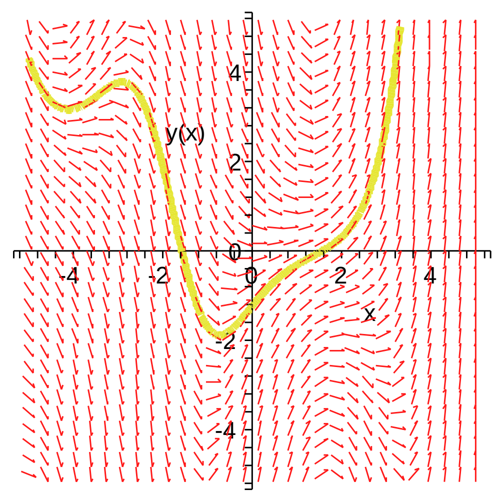
7. Dit is een tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

   a) De karakteristieke vergelijking $r^2 - 2r + 5 = 0$ heeft als wortels $r = 1 \pm 2i$. 8
   De oplossing van de gereduceerde (homogene) vergelijking is dus
   $$y_{\rm h} = c_1\,{\rm e}^x\,\sin 2x + c_2\,{\rm e}^x\,\cos 2x\,.$$

   b) Het rechterlid bevat een term die al in $y_{\rm h}$ voorkomt; daarom is een extra factor x in $y_{\rm p}$ nodig; stel $y_{\rm p} = x\,(A\,{\rm e}^x\,\sin 2x + B\,{\rm e}^x\,\cos 2x)$. 4



de kromme uit vraagstuk 2 en de bedoelde raaklijn



de oplossing van de differentiaalvergelijking uit vraagstuk 5

[3] de — niet-behandelde — delingsalgoritme en factorstelling zijn nodig