

Deeltentamen OPTIMALISERING (TW2020)

8 november 2017

13:30 – 15:30

Dit deeltentamen bestaat uit 5 vragen verdeeld over 6 pagina's. In totaal zijn er 45 punten te verdienen. Je cijfer wordt bepaald door bij het totaal aantal behaalde punten 5 op te tellen en vervolgens door 5 te delen. Je kunt alleen punten verdienen als je de **juiste methode** gebruikt en alle **stappen** duidelijk **opschrijft en beargumenteert** (tenzij anders aangegeven). Je mag bij dit tentamen alleen schrijfgerei en een niet-grafische rekenmachine gebruiken. Succes!

1. Argumentatie is bij **deze** opgave **niet** nodig.

- (a) (2 points) Geef een voorbeeld van een LP probleem met twee variabelen en twee restricties dat **onbegrensd** is.

Solution: Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{ll}\max & x_1 + x_2 \\ \text{o.d.v.} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

- (b) (3 points) Geef een voorbeeld van een LP probleem met twee variabelen en twee restricties dat **meerdere optimale** oplossingen heeft.

Solution: Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{ll}\min & x_1 \\ \text{o.d.v.} & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

2. (10 points) Beschouw het onderstaande LP probleem. Los dit probleem op met de **twee-fasen Simplex methode**. Geef voor elke iteratie het Simplex tableaux met daarin het pivot element omcirkeld. Geef ook de gevonden optimale oplossing.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{o.d.v.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 5 \\
 & x_2 \leq 5 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 11 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Solution: Starttableaux voor de eerste fase:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	x_1^a
x_1^a	5	2	1	-1	0	0	1
s_2	5	0	1	0	1	0	0
s_3	11	2	1	0	0	1	0
$-w$	0	0	0	0	0	0	1

Druk doelfunctie uit in niet-basisvariabelen:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	x_1^a
x_1^a	5	2	1	-1	0	0	1
s_2	5	0	1	0	1	0	0
s_3	11	2	1	0	0	1	0
$-w$	-5	-2	-1	1	0	0	0

Breng x_1 in de basis (x_2 mag evt. ook). Volgens de minimum ration test verlaat x_1^a de basis. Dit geeft het volgende tableau:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	x_1^a
x_1	5/2	1	1/2	-1/2	0	0	1/2
s_2	5	0	1	0	1	0	0
s_3	6	0	0	1	0	1	-1
$-w$	0	0	0	0	0	0	1

Optimale oplossing van 1e fase gevonden en geen kunstmatige variabelen in de basis. Verwijder kolom van x_1^a en zet originele doelfunctie terug:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_1	$5/2$	1	$1/2$	$-1/2$	0	0
s_2	5	0	1	0	1	0
s_3	6	0	0	1	0	1
$-z$	0	3	2	0	0	0

Druk doelfunctie weer uit in niet-basisvariabelen:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_1	$5/2$	1	$1/2$	$-1/2$	0	0
s_2	5	0	1	0	1	0
s_3	6	0	0	1	0	1
$-z$	$-15/2$	0	$1/2$	$3/2$	0	0

Breng s_1 in de basis (x_2 mag ook). s_3 is dan de enige kandidaat om de basis te verlaten. Dit geeft het volgende tableau:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_1	$11/2$	1	$1/2$	0	0	2
s_2	5	0	1	0	1	0
s_1	6	0	0	1	0	1
$-z$	$-33/2$	0	$1/2$	0	0	$-3/2$

Breng x_2 in de basis, s_2 verlaat de basis. Dit geeft het volgende tableau:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_1	3	1	0	0	$1/2$	2
x_2	5	0	1	0	1	0
s_1	6	0	0	1	0	1
$-z$	$-38/2$	0	0	0	$-1/2$	$-3/2$

Optimale oplossing gevonden: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ met waarde 19.

3. (10 points) De brandweer van Amsterdam wil zijn brandweerwagens zo slim mogelijk positioneren zodat branden snel geblust kunnen worden. Dit wordt gecompliceerd doordat er verschillende soorten brandweerwagens zijn en elk gebouw specifieke eisen heeft voor het type brandweerwagen dat nodig is in het geval van brand.

Er zijn K brandweerkazernes, G gebouwen en W types brandweerwagens. Er zijn b_w brandweerwagens van type w beschikbaar. Verder is gegeven een parameter $d_{wg} \in \{0, 1\}$ die aangeeft of een wagen van type w nodig is voor gebouw g (in welk geval $d_{wg} = 1$) of niet ($d_{wg} = 0$). Gebouw g wordt **gedekt** door een wagen van type w als er een wagen van type w aanwezig is op een brandweerkazerne k waarvoor de rijtijd t_{kgw} van kazerne k naar gebouw g met een wagen van type w hooguit r minuten is. De **dekking** van een gebouw g is het aantal wagentypes w waarvoor $d_{wg} = 1$ en gebouw g gedekt wordt door wagentype w . Het doel is om te beslissen welke type wagens op elke kazerne geplaatst moeten worden zodanig dat de totale dekking (d.w.z. de som over alle gebouwen) maximaal is. Formuleer dit probleem als een **ILP probleem**.

Solution:

Beslissingsvariabelen:

$x_{kw} = 1$ als er een wagen van type w geplaatst wordt op kazerne k en anders $x_{kw} = 0$

$y_{gw} = 1$ als gebouw g gedekt door een wagen van type w , en anders $y_{gw} = 0$.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{g=1}^G \sum_{w=1}^W d_{gw} y_{gw} \\ \text{o.d.v.} \quad & \sum_{k=1}^K x_{kw} \leq b_w \quad \forall w \in \{1, \dots, W\} \\ & \sum_{k|t_{kgw} \leq r} x_{kw} \geq y_{gw} \quad \forall g \in \{1, \dots, G\}, w \in \{1, \dots, W\} \\ & x_{kw}, y_{gw} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, g \in \{1, \dots, G\}, w \in \{1, \dots, W\} \end{aligned}$$

4. Laat A, B twee $m \times n$ matrices zijn, $b, d \in \mathbb{R}^m$ en

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, Bx = d, x \geq 0\}.$$

- (a) (5 points) Bewijs dat de verzameling P convex is.

Solution: Stel $x, y \in P$ en $0 \leq \lambda \leq 1$. Dan is $\lambda x + (1 - \lambda)y \geq 0$ en

$$A(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay \geq \lambda b + (1 - \lambda)b = b$$

en

$$B(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda Bx + (1 - \lambda)By = \lambda d + (1 - \lambda)d = d$$

dus

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in P.$$

- (b) (5 points) Bewijs dat $P = \emptyset$ dan en slechts dan als er $\pi, \lambda \in \mathbb{R}^m$ bestaan met

$$\begin{aligned}\pi^T b + \lambda^T d &> 0 \\ \pi^T A + \lambda^T B &\leq 0 \\ \pi &\geq 0.\end{aligned}$$

Hint: gebruik dualiteit.

Solution: Beschouw het primale LP probleem:

$$\begin{aligned}\min \quad & 0^T x \\ \text{o.d.v.} \quad & Ax \geq b \\ & Bx = d \\ & x \geq 0\end{aligned}$$

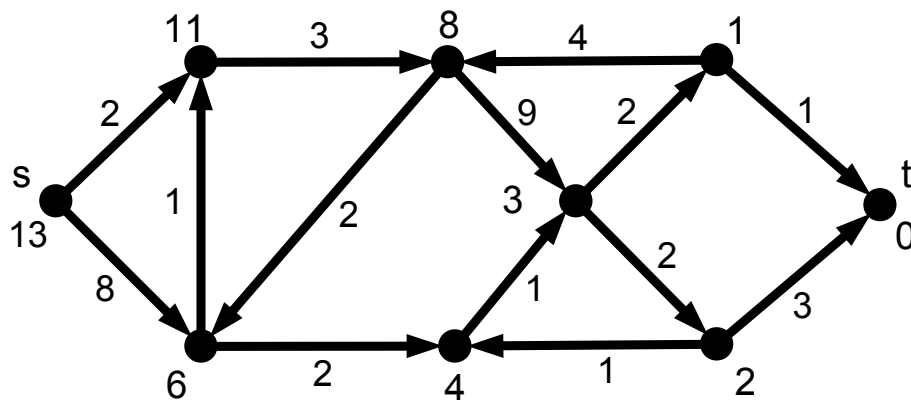
En de duale:

$$\begin{aligned}\max \quad & \pi^T b + \lambda^T d \\ \text{o.d.v.} \quad & \pi^T A + \lambda^T B \leq 0 \\ & \pi \geq 0\end{aligned}$$

Stel eerst $P = \emptyset$, dan is het primale probleem niet toegelaten. Het duale probleem is wel toegelaten ($\pi = \lambda = 0$) en dus onbegrensd. Dus zijn er toegelaten oplossingen met positieve doelfunctiewaarde. Dus bestaan er π en λ die aan de voorwaarden voldoen.

Stel nu $P \neq \emptyset$ dan heeft het primale probleem een toegelaten oplossing. Dus is het duale probleem begrensd. Als er nu π, λ zouden bestaan die aan de voorwaarden voldoen, dan zijn $c\pi, c\lambda$ een toegelaten oplossing van het duale probleem en als $c \rightarrow \infty$ dan gaat de doelfunctiewaarde ook naar oneindig, in tegenspraak met het begrensd zijn van het duale probleem.

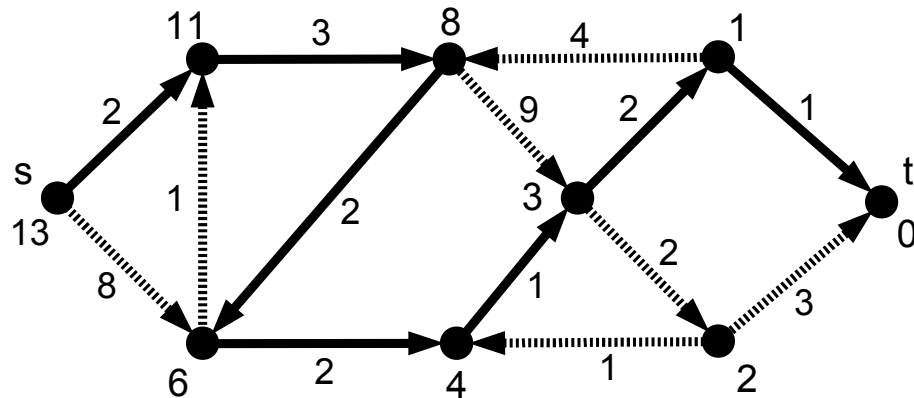
5. Beschouw het onderstaande netwerk.



- (a) (5 points) Interpreteer elk label van een pijl (u, v) als de lengte c_{uv} van die pijl. Daarnaast heeft elk punt v een label π_v dat ook is weergegeven in de figuur. Deze waarden vormen een optimale oplossing π van de **duale** van het kortste pad probleem. Gebruik **complementary slackness** om een kortste pad van s naar t te vinden. Geef aan hoe je complementary slackness

gebruikt. Je hoeft niet alle restricties uit te schrijven. Teken wel het gevonden kortste pad in de graaf.

Solution: Uit complementary slackness volgt dat als $\pi_u - \pi_v < c_{uv}$ dan ligt pijl (u, v) niet op het kortste pad. Alle pijlen wegstrepend waarvoor dit geldt krijgen we het volgende kortste pad.



- (b) (5 points) Interpreteer elk label van een pijl (u, v) als de capaciteit b_{uv} van die pijl en negeer de labels van de punten. Toon aan dat er geen s - t stroom met waarde 4 of meer bestaat.

Solution: Laat $\overline{W}$ bestaan uit t en het punt rechtsonder met label 2 en W uit alle andere punten. Dan is $(W, \overline{W})$ een s - t snede met capaciteit $2 + 1 = 3$. Uit de max flow min cut stelling volgt dat er geen stroom is met waarde 4 of meer.