

Tentamen TI3306 Complexiteitstheorie

28 juni 2016

9.00-12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 10 meerkeuzevragen, 5 korte (open) vragen en 2 open vragen.
- Voor de meerkeuzevragen kunt u maximaal 50 punten behalen, voor de korte open vragen maximaal 30 punten en voor de open vragen maximaal 20 punten.
- Het totaal aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) wordt als volgt bepaald:
 - o Per meerkeuzevraag i wordt het aantal foutief beantwoorde alternatieven f_i bepaald. Aangezien per vraag 0,1,2,3 of 4 alternatieven juist kunnen zijn geldt: $0 \leq f_i \leq 4$;
 - o Laat $f = \sum f_i$ voor alle 10 meerkeuzevragen ($0 \leq f \leq 40$); het aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) is dan $mp = 50 \times \max\{0, (40 - 1.5 \times f) / 40\}$.
- Het eindcijfer c wordt bepaald door de som te nemen van mp , het totaal aantal punten behaald voor de 5 korte vragen (kv) en de som van het aantal punten behaald voor de twee open vragen (ov) en vervolgens het resultaat te delen door 10: $c = (mp + kv + ov) / 10$; dit cijfer wordt vervolgens afgerond op het dichtstbijzijnde halve of gehele getal.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen, boek of andere bronnen is niet toegestaan.
- Het gebruik van grafische en niet-grafische rekenmachines is eveneens niet toegestaan.
- Beantwoord de meerkeuzevragen op het bijgeleverde antwoordformulier.
- Beantwoord de open vragen zo bondig mogelijk; geef geen irrelevante informatie, dit kan leiden tot puntenaftrek!
- Controleer of u op ieder blaadje uw naam en studienummer heeft vermeld en geef het totaal aantal ingeleverde bladen op (tenminste) de eerste pagina.

Notationele conventies:

- $A \leq B$ betekent dat er een polynomiale-tijdreductie van A naar B bestaat
- $A \leq_T B$ betekent dat er een polynomiale Turingreductie van A naar B bestaat.
- A^c is het complement van het probleem A .
- Er wordt steeds vanuit gegaan, dat $P \neq NP$ en $NP \neq coNP$, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel wordt vermeld.

MEERKEUZEVRAGEN (50 PUNTEN)

- Vraag 1. Het is bekend dat SATISFIABILITY (SAT) een **NP**-compleet probleem is. Daarom geldt dat:
- geen enkele probleeminstantie van SAT in polynomiale tijd oplosbaar is.
 - $SAT \leq A$ voor ieder probleem $A \in NP$.
 - alle probleeminstanties van SAT in exponentiële tijd oplosbaar zijn.
 - sommige probleeminstanties van SAT niet in polynomiale tijd oplosbaar zijn.

Antwoord

- is onjuist: er zijn ook efficiënt oplosbare instanties zoals b.v. het bepalen van de vervulbaarheid van instanties met 2 variabelen per clause.
- is onjuist: (het is net andersom).
- is juist, omdat $NP \subseteq EXP$.
- is juist, omdat SAT een NPC probleem is en $P \neq NP$ (aanname pag. 1).

- Vraag 2. Voor twee problemen A en B kunnen we altijd concluderen dat $A \leq B$ als
- A een **P**-probleem is en B een **NP**-probleem is.
 - A een **NP**-probleem is en B een **PSPACE**-volledig probleem is.
 - A een **NPC**-probleem is en B een **NP-hard** probleem.
 - A een **coNP**-probleem is en B een **NPC**-probleem is.

Antwoord

- is onjuist: Neem b.v. $B = \emptyset$;
- is juist: $NP \subseteq PSPACE$ en $X \leq B$ voor ieder probleem X in PSPACE, dus ook voor $X=A$.
- is juist, want $X \leq B$ voor ieder NP-probleem X, dus ook voor $X=A$.
- is onjuist, als $NP \neq coNP$ dan geldt deze conclusie niet.

- Vraag 3. Welke van onderstaande beweringen zijn correct?
- Een probleem kan niet zowel in **P** als in **NPC** liggen.
 - Alle **NPC**-problemen zijn tevens **NP-hard**.
 - Voor ieder tweetal problemen A en B in **NP** geldt: $A \leq B$ of $B \leq A$.
 - Voor ieder **P**-probleem A bestaat er een **NP**-probleem B met $A \leq B$.

Antwoord

- is juist: als $P \neq NP$, dan is NPC disjunct met P ($NPC \cap P \neq \emptyset$ impliceert dat $P=NP$).
- is juist: NPC is een subset van NP-hard.
- is onjuist: neem voor A de lege taal en B de volledige taal.
- is juist: kies voor B een NPC probleem.

- Vraag 4. Welke van de onderstaande inclusierelaties zijn geldig
- $P \subseteq NP \cup coNP$.
 - $P^{NP} \subseteq NP^P$.
 - $NPC \subseteq PP$.
 - $P \subseteq BPP$.

Antwoord

- is juist: P is bevat in NP en coNP dus ook in hun vereniging
- is onjuist: $NP^P = NP$ en P^{NP} omvat zowel NP als coNP.
- is juist want $NP \subseteq PP$.
- is juist: P is de klasse van talen die geaccepteerd worden door een probabilistische Tm met foutmarge 0.

Vraag 5. Veronderstel, dat er een **PSPACE**-volledig probleem X wordt gevonden, dat tevens een **P**-probleem blijkt te zijn. Welke van de volgende uitspraken is of zijn in dat geval waar?

- a. $\mathbf{NP} = \mathbf{co-NP}$.
- b. $\mathbf{PSPACE} = \mathbf{P}$.
- c. $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
- d. $\mathbf{co-NP} \cap \mathbf{NP} = \emptyset$.

Antwoord

Omdat $X \in \mathbf{PSPACE-compleet} \cap \mathbf{P}$, geldt dat ieder **PSPACE** probleem Y polynomiaal reduceerbaar is naar een **P**-probleem. Derhalve geldt $\mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{P}$. Omdat we al weten dat $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{PSPACE}$, volgt $\mathbf{P} = \mathbf{PSPACE}$.

Aangezien zowel **NP** als **coNP** bevat zijn in **PSPACE** geldt dan ook (analoog) dat $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ en $\mathbf{P} = \mathbf{coNP}$.

Derhalve geldt:

- a. is juist
- b. is juist
- c. is juist
- d. is onjuist, $\mathbf{P} = \mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ volgt en **P** is niet-leeg.

Vraag 6. Neem het volgende probleem:

Gegeven een graaf $G = (V, E)$, een subset $V' \subseteq V$, twee knopen s en t in V en twee positieve integers K en L , bestaat er een simpel pad in G van s naar t dat (i) tenminste K knopen in V' bevat en (ii) een lengte heeft $\leq L$?

Dit probleem is:

- a. een **NP-hard** probleem, want **HAMPAD** is polynomiaal reduceerbaar naar dit probleem.
- b. een **P**-probleem, want het is immers een restrictie van het **KORTSTE PAD** probleem.
- c. een **coNPC**-probleem, want het complement van het **KORTSTE PAD** probleem is polynomiaal reduceerbaar naar dit probleem.
- d. een **NP**-probleem, want yes-instanties zijn polynomiaal verifieerbaar.

Antwoord

a. is juist: **HAMPAD** is een restrictie van dit probleem: neem maar $V' = V$, $K = |V|$ en $L = |V|$.

Een pad dat tenminste $|V|$ knopen bevat uit V en een lengte heeft $\leq |V|$ is immers een hamiltoons pad van G .

b. is onjuist, het is geen restrictie van het kortste pad probleem.

c. is onjuist, dit probleem is een **NP** probleem (zie d.) en bovendien is het bestaan van zo'n reductie niet relevant voor het lidmaatschap van **coNPC**.

d. is juist: gok een pad in G en verifieer in polynomiale tijd of het aan de voorwaarden voldoet.

Vraag 7. Van een algoritme A is bekend dat het een 3-approximatiealgoritme is voor een minimalisatieprobleem P. Stel, dat we weten dat voor de optimale (minimale) waarde $opt(x)$ van een instantie x van P geldt: $90 \leq opt(x) \leq 99$.
Dan geldt voor de mogelijke uitkomsten $A(x)$ van het algoritme A voor deze instantie x :

- a. $270 \leq A(x) \leq 297$
- b. $30 \leq A(x) \leq 33$
- c. $90 \leq A(x) \leq 270$
- d. $90 \leq A(x) \leq 297$

Antwoord

Als $90 \leq opt(x) \leq 99$, dan kan $A(x)$ niet groter zijn dan $3 \times 99 = 297$, omdat $A(x)/opt(x) \leq 3$ ook als $opt(x) = 99$. We weten dat altijd geldt $A(x)/opt(x) \geq 1$, ook als $90 = opt(x)$, dus $A(x) \geq 90$. Derhalve geldt $90 \leq A(x) \leq 297$.

Er geldt dus:

- a. is onjuist.
- b. is onjuist.
- c. is onjuist.
- d. is juist.

Vraag 8. Welke van onderstaande beweringen zijn correct?

- a. Een probleem kan niet in zowel **NP** als **EXP** liggen.
- b. Sterk-**NP** volledige problemen kunnen een pseudo-polynomiaal algoritme hebben.
- c. Voor ieder tweetal problemen A en B die **PSPACE**-compleet zijn geldt: $A \leq B$ of $B \leq A$.
- d. Voor ieder sterk **NP**-probleem A bestaat er een **NP**-volledig probleem B waarvoor $A \leq B$.

Antwoord

- a. is onjuist, omdat **EXP** de klasse **NP** omvat.
- b. is onjuist, dit is een bekende eigenschap van sterk-NP volledige problemen.
- c. is juist: alle PSPACE complete problemen zijn even moeilijk.
- d. is juist omdat er minstens een NP-volledig probleem bestaat (zoals CLIQUE)

Vraag 9. Neem het volgende probleem EXT-SAT:
Gegeven: een SATISFIABILITY-instantie (U, C) waarvan bekend is dat C vervulbaar is en een nieuwe clause c' over U .

Vraag: is $C \cup \{c'\}$ vervulbaar?

De volgende reductie van SAT kan gebruikt worden om aan te tonen dat dit probleem **NP**-hard is onder polynomiale-tijd reducties:

Neem een willekeurige instantie (U_0, C_0) van SAT en creëer de volgende instantie van EXT-SAT:

- a. $U = U_0 \cup \{z\}$, $C = \{c \cup \{z\} \mid c \in C_0\}$ en $c' = \{\neg z\}$, waarbij $z \notin U_0$.
- b. $U = U_0 \cup \{z\}$, $C = C_0 \cup \{\{z\}\}$ en $c' = \{\neg z\}$, waarbij $z \notin U_0$.
- c. $U = U_0 \cup \{y, z\}$, $C = \{c \cup \{y\} \mid c \in C_0\}$ en $c' = \{\neg y, \neg z\}$, waarbij $y, z \notin U_0$.
- d. $U = U_0 \cup \{y, z\}$, $C = \{c \cup \{y\} \mid c \in C_0\} \cup \{\{z\}\}$ en $c' = \{\neg y, \neg z\}$, waarbij $y, z \notin U_0$.

Nb: bedenk hierbij dat een SAT-clause wordt gepresenteerd door een verzameling literals. Een verzameling C van clauses wordt derhalve gerepresenteerd door een verzameling van verzamelingen van literals.

Antwoord

- a. is juist: (U, C) is triviaal vervulbaar door z waar te maken en $(U, C \cup \{c'\})$ is vervulbaar dan en slechts dan als (U_0, C_0) vervulbaar is: de vervulbaarheid van $(U, C \cup \{c'\})$ vereist immers dat z onwaar wordt gemaakt en (U_0, C_0) vervulbaar is.
- b. is onjuist, omdat $(U, C \cup \{c'\})$ nu onvervulbaar is.
- c. is onjuist, omdat (U_0, C_0) onvervulbaar kan zijn terwijl met y is waar en z is onwaar $(U, C \cup \{c'\})$ vervulbaar is.
- d. is juist: (U, C) is triviaal vervulbaar en $(U, C \cup \{c'\})$ is vervulbaar desda z is waar en y is onwaar en (U_0, C_0) vervulbaar.

Vraag 10. Neem het volgende randomized algoritme voor het probleem om, gegeven een lijst A met n getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$, te bepalen of er een waarde meer dan $n/3$ maal voorkomt in de lijst.

```
OneThird(A, n)
begin
  i := random(1,n);           % kies een random getal uit 1..n
  x := ai;
  count := 0;
  for k=1 to n do
    if ak = x then count := count+1
    k:=k+1;
  return (count > n/3);
end
```

Met behulp van dit algoritme kan worden aangetoond dat

- er een randomized algoritme bestaat dat altijd een correct antwoord geeft als de lijst A geen enkele waarde bevat die meer dan $n/3$ -maal voorkomt in A.
- voor elke positieve integer k er een randomized algoritme bestaat met polynomiale looptijd dat met kans $< (\frac{2}{3})^k$ een incorrect antwoord op het bovenstaande probleem geeft als A een getal bevat dat meer dan $n/3$ maal voorkomt.
- dit probleem tot de klasse **PP** behoort.
- dit probleem tot de klasse **BPP** behoort.

Antwoord

- is juist: als geen waarde y meer dan $n/3$ maal voorkomt in de lijst zal het algoritme altijd een correct antwoord geven.
- is juist: als zo'n element y wel bestaat, heeft tenminste $\frac{1}{3}$ van het aantal elementen deze waarde. Het algoritme geeft dan met een kans $\geq \frac{1}{3}$ een juist antwoord. Als je het algoritme dan k -maal herhaalt, is de kans op een onjuist antwoord $< (\frac{2}{3})^k$.
- is juist. Het algoritme is een BPP algoritme en $\text{BPP} \subseteq \text{PP}$.
- is juist, zie c.

OPEN VRAGEN I (30 PUNTEN)

Onderstaande vragen dient u kort te beantwoorden.

Een antwoord dient in hoogstens 5-10 regels gegeven te worden.

Vraag 11. Met P^{SAT} wordt de klasse van problemen aangeduid die opgelost kunnen worden met een polynomiaal algoritme dat een SAT-orakel kan aanroepen. Zo'n algoritme zou een polynomiaal algoritme zijn als het totaal aantal SAT orakelaanroepen polynomiale tijd zou vergen. Toon aan dat geldt $P^{SAT} = P^{NP}$.

Antwoord Het is duidelijk dat $P^{SAT} \subseteq P^{NP}$ want $SAT \in NP$. Om te laten zien dat het omgekeerde geldt, nemen we een algoritme dat een orakel voor een willekeurig NP-probleem X aanroept. Omdat $X \leq SAT$, kun je elke orakelaanroep $X(input)$ vervangen door $SAT(f(input))$ waarbij f de reductie is van X naar SAT .

Vraag 12. We weten dat HALFCLIQUE (Gegeven $G = (V, E)$, heeft G een clique ter grootte $\geq |V|/2$) een NPC probleem is. Hoe kun je dan eenvoudig laten zien dat DRIEKWARTCLIQUE (Gegeven $G = (V, E)$, heeft G een clique ter grootte $\geq \lceil 3|V|/4 \rceil$) een NP-hard probleem is?

Antwoord Met een polynomiale reductie $HALFCLIQUE \leq DRIEKWARTCLIQUE$. Gegeven een HALFCLIQUE-instantie $G = (V, E)$, laat $G' = (V \cup V', E \cup E')$, waarin $|V'| = |V| = n$ een verzameling is van disjuncte knopen en $E' = \{\{v', w'\} : v', w' \in V'\} \cup \{\{v, v'\} : v \in V, v' \in V'\}$. Nu heeft G' een (driekwart) clique die bestaat uit minstens $n + n/2 = 3/4 \times 2n$ knopen alss G een clique heeft ter grootte van minstens $n/2$ knopen.

Vraag 13. Neem het volgende approximatie-algoritme voor MINCOVER:

```
input:  $G = (V, E)$ ;  
output: een vertex cover  $C$  van  $G$ ;  
begin  
   $C := \emptyset$ ;  
  while  $E \neq \emptyset$   
    selecteer een knoop  $v \in V$  die een eindpunt is van  
    een zo groot mogelijk aantal ( $> 0$ ) kanten uit  $E$ ;  
    verwijder  $v$  en alle kanten  $e$  incident met  $v$  uit  $G$ ;  
    voeg  $v$  toe aan  $C$ ;  
  return  $C$ ;  
end
```

Laat zien dat dit algoritme inderdaad een vertex cover van G produceert en deze vertex cover een $|V|/2$ -approximatie is van een minimale vertex cover van G .

Antwoord C is een vertex cover van G : voor alle kanten $e = \{u, v\} \in E$ wordt minstens een eindpunt (u of v) in de vertex cover opgenomen.

Voor de $V/2$ -approximatie onderscheiden we drie gevallen:

1. het algoritme selecteert 0 knopen. Dan bevat G geen kanten en is de minimale VC ook leeg.
2. het algoritme selecteert 1 knoop. Dan is die knoop incident met alle kanten van G en is derhalve minimale cover van G .
3. het algoritme selecteert $k > 1$ knopen. Dan moeten er tenminste 2 kanten in E zijn, die geen eindpunt met elkaar gemeen hebben. Dan moet iedere minimale cover tenminste 2 knopen bevatten om deze twee kanten te coveren. Omdat $k \leq |V|$ is, geldt dat de gevonden cover nooit meer dan $k/2 \leq |V|/2$ keer zo groot is als de minimale cover.

In alle gevallen is de gevonden vertex cover nooit meer dan $|V|/2$ maal zo groot als een minimale cover.

Vraag 14. Stel dat Y een **P**-probleem is met een eindig aantal instanties.
Laat zien dat Y oplosbaar is in $O(1)$ -tijd.

Antwoord Omdat er een (polynomiaal) algoritme voor Y bestaat, kunnen we het maximum bepalen van de looptijd voor enige instantie I van Y . Dit is een constante c , omdat het aantal instanties eindig is. Derhalve is Y oplosbaar in $O(1)$ -tijd.

Vraag 15. Geef precies aan welke redenen er zijn om te veronderstellen dat er geen polynomiale quantumalgoritmen voor **NPC** problemen gevonden zullen worden?

Antwoord Er zijn twee redenen te noemen:

1. Het is bekend dat quantumvarianten van backtrackingalgoritmen niet meer dan een kwadratische versnelling t.o.v. klassieke backtrackingalgoritmen zullen kunnen opleveren.
2. Weliswaar zijn er algoritmen gevonden die ten opzichte van klassieke algoritmen een exponentiele versnelling geven, maar dit zijn algoritmen voor problemen die niet NP-compleet zijn.

OPEN VRAGEN II (20 PUNTEN)

Beantwoord onderstaande vragen zo kort mogelijk. Geef geen irrelevante informatie, dit kan tot puntenaftrek aanleiding geven.

Vraag 16. (15 punten)

Een evenementenorganisatie wil nagaan hoeveel controleposten men nodig heeft om alle routes te controleren die personen in een stad S gebruiken om naar evenemententerreinen te gaan. Men benut hiervoor een kaart van S in de vorm van een ongerichte graaf $G = (V, E)$. Hierin bevat de verzameling V alle mogelijke plaatsen voor het inrichten van een controlepost.

Alle routes die men benut om naar de evenementen te komen worden weergegeven door een gegeven verzameling P van paden $p_1, \dots, p_t$ in G .

De algemene vraag is nu of het mogelijk is om met k controleposten alle evenementenverkeer te controleren, dwz, om gegeven een ongerichte graaf $G=(V, E)$, een verzameling $P = \{p_1, \dots, p_t\}$ van paden in G , en een integer k , te beslissen of er k knopen (controleposten) in V zijn te vinden, zodanig dat op elk pad p_j zich tenminste één geselecteerde controlepost bevindt?

- Toon aan, dat het bovengenoemde probleem een **NP**-probleem is (≤ 5 regels).
- Laat zien dat in het algemeen dit probleem een **NP-hard** probleem is door een expliciete polynomiale reductie te geven van een bekend **NPC**-probleem naar dit probleem. Het is hierbij **niet** nodig een correctheidsbewijs te geven. (≤ 15 regels).

- Antwoord**
- Het probleem is een NP-probleem: markeer k knopen en ga na voor ieder van de t paden of ze zo'n knoop bevatten. Dit kost, per pad p_i , $O(|p_i| \times k)$ tijd. Derhalve in totaal $O(\sum_i |p_i| \times k) = O(|I|^2) \times k$ tijd.
 - Voor de reductie is het voldoende om te bedenken dat met $P = E$, het vertex cover probleem een restrictie is van dit probleem. Voor $P=E$ moet immers nagegaan worden of er k knopen uit V te vinden zijn zodanig dat iedere kant e (een pad ter lengte van 1 in G) tenminste een eindpunt heeft die deel uitmaakt van deze k knopen. Maar dit is precies het vertex cover probleem. Aangezien $VC \in NPC$ een restrictie is van dit probleem, is dit probleem een NP-hard probleem.

Vraag 17. (5 punten)

EFFICIËNTE SURVEILLANCE is een probleem dat bestaat uit

- een ongerichte graaf $G = (V, E)$, waarin V een verzameling locaties en E een verzameling directe zichtbaarheidsverbindingen tussen de locaties in V is: als $\{u, v\}$ een kant in E is dan is u zichtbaar vanuit v en omgekeerd.
- twee positieve integers B en C ,
- een afstandenmatrix $D = [d_{ij}]$ van afstanden $d_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ tussen alle locaties v_i en v_j in V .

De vraag is of er een tour T met totale afstand $\leq C$ bestaat die hoogstens B locaties uit V aandoet, zodat voor alle locaties v in V geldt dat (i) ofwel v voorkomt in T of (ii) v zichtbaar is vanuit een locatie u in T .

- Laat zien dat EFFICIËNTE SURVEILLANCE een NP-hard probleem is, door te laten zien dat een bekend NPC-probleem een restrictie van dit probleem is.

- Antwoord**
- EFFICIËNTE SURVEILLANCE instanties waarin $E = \emptyset$ en $B = |V|$ zijn precies TSP-instanties: er bestaat een tour T met totale afstand $\leq C$ is als iedere knoop v uit V in T voorkomt (een knoop die niet in de tour voorkomt is niet zichtbaar vanuit de tour omdat $E = \emptyset$) en de totale afstand $\leq C$ is.

EINDE TENTAMEN