

Tentamen TI3306 Complexiteitstheorie

19 april 2017

9.00-12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 10 meerkeuzevragen, 5 korte (open) vragen en 2 open vragen.
- Voor de meerkeuzevragen kunt u maximaal 50 punten behalen, voor de korte open vragen maximaal 30 punten en voor de open vragen maximaal 20 punten.
- Het totaal aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) wordt als volgt bepaald:
 - o Per meerkeuzevraag i wordt het aantal foutief beantwoorde alternatieven f_i bepaald. Aangezien per vraag 0,1,2,3 of 4 alternatieven juist kunnen zijn geldt: $0 \leq f_i \leq 4$;
 - o Laat $f = \sum f_i$ voor alle 10 meerkeuzevragen ($0 \leq f \leq 40$) ; het aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) is dan $mp = 50 \times \max\{0, (40 - 1.5 \times f) / 40\}$.
- Het eindcijfer c wordt bepaald door de som te nemen van mp , het totaal aantal punten behaald voor de 5 korte vragen (kv) en de som van het aantal punten behaald voor de twee open vragen (ov) en vervolgens het resultaat te delen door 10: $c = (mp + kv + ov) / 10$; dit cijfer wordt vervolgens afgerond op het dichtstbijzijnde halve of gehele getal.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen, boek of andere bronnen is niet toegestaan.
- Het gebruik van grafische en niet-grafische rekenmachines is eveneens niet toegestaan.
- Beantwoord de meerkeuzevragen op het bijgeleverde antwoordformulier.
- Beantwoord de open vragen zo bondig mogelijk; geef geen irrelevante informatie, dit kan leiden tot puntenaftrek!
- Controleer of u op ieder blaadje uw naam en studienummer heeft vermeld en geef het totaal aantal ingeleverde bladen op (tenminste) de eerste pagina.

Notationele conventies:

- $A \leq B$ betekent dat er een polynomiale-tijdreductie van A naar B bestaat
- $A \leq_T B$ betekent dat er een polynomiale Turingreductie van A naar B bestaat.
- A^c is het complement van het probleem A .
- Er wordt steeds vanuit gegaan, dat $P \neq NP$ en $NP \neq coNP$, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel wordt vermeld.

MEERKEUZEVRAGEN (50 PUNTEN)

Vraag 1. Het is bekend dat PARTITION een **NP**-compleet probleem is. Er geldt dat:

- a. $\text{PARTITION} \leq A$ voor ieder probleem $A \in \text{NP}$.
- b. geen enkele restrictie van PARTITION in polynomiale tijd oplosbaar is.
- c. alle probleeminstanties van PARTITION in hoogstens exponentiële tijd oplosbaar zijn.
- d. er probleeminstanties van PARTITION zijn die niet in polynomiale tijd oplosbaar zijn, tenzij $P = \text{NP}$.

Antwoord

- a. is onjuist (het is net andersom: $A \leq \text{PARTITION}$).
- b. is onjuist: neem bv. het vinden van oplossingen voor PARTITION-instanties waarbij alle in de instantie voorkomende gewichten van objecten gelijk zijn aan elkaar.
- c. is juist: $\text{NP} \subseteq \text{EXP}$.
- d. is juist: als $P \neq \text{NP}$ dan kunnen niet alle instanties van **NP**C-problemen polynomiaal oplosbaar zijn.

Vraag 2. Neem de volgende drie problemen:

- i. Gegeven een graaf $G = (V, E)$, heeft G een clique ter grootte van $|V|-2$?
- ii. Gegeven een graaf $G = (V, E)$, heeft G een clique ter grootte van $|V|/2$?
- iii. Gegeven een graaf $G = (V, E)$, heeft G een clique ter grootte van 2 ?

Er geldt:

- a. i., ii. en iii. zijn **NP**-volledig problemen.
- b. i. is een **P**-probleem, maar ii. en iii. zijn **NP**-volledige problemen.
- c. i. en ii. zijn polynomiaal reduceerbaar naar iii.
- d. i. en iii. zijn polynomiaal reduceerbaar naar ii.

Antwoord Van deze problemen zijn i. en iii. polynomiaal oplosbaar (er is een polynomiaal aantal mogelijke cliques te onderzoeken). Probleem ii. is het HALF-CLIQUE probleem (zie college) en is **NP**-volledig. Derhalve geldt:

- a. is onjuist
- b. is onjuist.
- c. is onjuist.
- d. is juist.

Vraag 3. Welke van onderstaande beweringen is/zijn correct?

- a. Ieder **NP**C-probleem is ook een **EXP**-probleem.
- b. Voor ieder probleem $A \in \text{NP} - \text{P}$ is er een probleem $B \in \text{NP}$ met $B \leq A$.
- c. Voor ieder probleem $A \in \text{NP}$ bestaat er een probleem $B \in \text{NP}$ met $A \leq B$.
- d. alle **P**-problemen zijn onderling polynomiaal reduceerbaar tot elkaar.

Antwoord

- a. is juist, omdat $\text{NP} \subseteq \text{EXP}$.
- b. is juist. Omdat $A \in \text{NP} - \text{P}$, kan A niet gelijk zijn aan $\emptyset$ of Σ^* . Kies dan $B = \emptyset$; dan bestaat er altijd een polynomiale reductie van B naar A .
- c. is juist, kies $B \in \text{NP}$.
- d. is onjuist, want $\emptyset$ en Σ^* behoren tot **P** en zijn niet onderling reduceerbaar.

Vraag 4. Ga na welke van de volgende uitspraken juist zijn:

- a. Sommige **NP**-problemen zijn in $O(1)$ -tijd oplosbaar.
- b. Elk probleem in $\text{NP} \cup \text{coNP}$ is oplosbaar met een exponentieel backtracking algoritme.
- c. Als $A \in \text{P}$ dan $A \in \text{BPP}$.
- d. voor elk sterk-**NP**C probleem A is er een probleem $B \in \text{NP}$ probleem zodat $A \leq B$.

Antwoord

- a. is juist: neem maar problemen in **P** met een eindig aantal instanties.
- b. is juist: elk probleem in **NP** of **coNP** kan worden opgelost met een backtracking algoritme in exponentiële tijd.
- c. is juist: $\text{P} \subseteq \text{BPP}$.
- d. is juist: Neem maar eens een probleem B in **NP**C. Dan geldt $A \leq B$.

Vraag 5. Welke van de onderstaande inclusierelaties is/zijn geldig:

- a. $P \subseteq \text{coNP} \subseteq \text{PSPACE}$.
- b. $P^{NP} \subseteq \text{coNP}^{\text{coNP}}$.
- c. $\text{PSPACE}^{NP} \subseteq \text{NP}^{\text{PSPACE}}$.
- d. $P \subseteq PP$.

Antwoord

- a. is juist, zie colleges.
- b. is juist, want $P^{NP} \subseteq \text{coNP}^{NP} = \text{coNP}^{\text{coNP}}$.
- c. is juist, want
 - (1) zowel $\text{NP}^{\text{PSPACE}}$ als PSPACE^{NP} zijn bevat in $\text{PSPACE}^{\text{PSPACE}}$
 - (2) PSPACE is bevat in $\text{NP}^{\text{PSPACE}}$ als PSPACE^{NP} en
 - (3) $\text{PSPACE}^{\text{PSPACE}} \subseteq \text{PSPACE}$daarom zijn deze twee klassen zelfs aan elkaar gelijk.
- d. is juist, zie colleges.

Vraag 6. Welke van onderstaande beweringen is/zijn correct onder de aanname dat $\text{NP} \neq P$?

- a. Een probleem kan niet zowel in P , PSPACE als ook in EXP liggen.
- b. Elke restrictie van een sterk-NPC-probleem is een NPC-probleem.
- c. Als $A \leq B$ en B is goed benaderbaar, dan is A ook goed benaderbaar.
- d. Voor elk probleem $A \in P$ bestaat er een algoritme dat A oplost in polynomiale ruimte.

Antwoord

- a. is onjuist, er geldt $P \subseteq \text{PSPACE} \subseteq \text{EXP}$.
- b. is onjuist, VC is bv. een sterk NPC probleem, maar de restrictie tot VC-problemen met $K=|V|$ is een P-probleem.
- c. is onjuist, $\text{TSP} \leq \text{VC}$ en terwijl VC goed benaderbaar is, is TSP niet goed benaderbaar.
- d. is juist. Een algoritme dat polynomiale tijd vergt, kan niet meer dan polynomiale ruimte kosten.

Vraag 7. Gegeven zijn 3 beslissingsproblemen A, B en C. Het probleem A is een **co-NP** probleem, en C is een **NPC**-probleem. Er geldt nu

- a. Als $A \leq C$, dan moet gelden $\text{NP} = \text{coNP}$.
- b. Als $C \leq A$, dan geldt $\text{NP} = \text{coNP}$.
- c. Als $C \leq B$ dan geldt $B \leq C$.
- d. Als $B \leq C$ dan geldt $B \in \text{NP}$.

Antwoord

- a. is onjuist, want A kan bv. een P-probleem zijn en er kan dan niet afgeleid worden dat $\text{NP} = \text{coNP}$.
- b. is juist, als $C \leq A$, dan is er een NPC-probleem dat tevens in **coNP** ligt en daaruit volgt $\text{NP} = \text{coNP}$.
- c. is onjuist: als $C \leq B$, is B een **NP-hard** probleem. B hoeft echter geen NP-probleem te zijn.
- d. is juist omdat C een **NP(C)** probleem is, en NP naar beneden gesloten is onder $\leq$, geldt $B \in \text{NP}$.

Vraag 8. A is een probleem in $(\mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}) - \mathbf{P}$. Dan geldt dat

- a. A geen polynomiaal algoritme heeft.
- b. yes-instanties en no-instanties van A polynomiaal verifieerbaar zijn.
- c. A geen $\mathbf{P}$ -probleem is, tenzij $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$.
- d. voor elk $(\mathbf{co})\mathbf{NP}$ probleem B geldt $B \leq A$.

Antwoord

- a. is juist: A is per definitie geen $\mathbf{P}$ -probleem
- b. is juist.
- c. is onjuist: zelfs als $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ kan $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.
- d. is onjuist: neem maar eens $B \in \mathbf{coNPC}$. Dan zou $B \leq A$ impliceren dat $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$.

Vraag 9. Het probleem om, gegeven een ongerichte graaf $G = (V, E)$, te bepalen of G minstens één, maar ten hoogste twee verschillende hamiltonse paden heeft, is een probleem in

- a. $\mathbf{NP}$.
- b. $\mathbf{coNP}$.
- c. $\mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$.
- d. $\mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$.

Antwoord

Dit probleem kun je oplossen door een $\mathbf{NP}$ -orakel twee vragen te stellen: (1) heeft G een hamiltons pad en (2) heeft G niet meer dan 2 verschillende hamiltonse paden?

- a. is onjuist (het is niet bekend hoe we yes-instanties in polynomiale tijd zouden kunnen verifiëren)
- b. is onjuist (het is niet bekend hoe we no-instanties in polynomiale tijd zouden kunnen verifiëren)
- c. is juist.
- d. is onjuist (dan zouden immers a. en b. ook juist zijn).

Vraag 10. ZEROSUMCYCLE (ZSC) is het volgende probleem:

Gegeven: een ongerichte graaf $G = (V, E)$ en een functie w die aan iedere kant e in E een positief of negatief geheeltallig gewicht $w(e)$ toekent.

Gevraagd: heeft G een simpele cycle c waarvan de som van de gewichten op de kanten in c gelijk is aan 0?

Om aan te tonen dat dit probleem $\mathbf{NP}$ -hard is, stelt iemand de volgende reductie voor:

Gegeven een instantie $G = (V, E)$ van HAMILTOONS CIRCUIT met v een willekeurige knoop in V en $|V| = n$, laat $f(G) = (V, E, w)$ de instantie zijn van ZSC waarbij $w(e) = n-1$ voor alle kanten e waarin v als een eindpunt voorkomt en $w(e) = -1$ voor alle overige kanten e in E .

Er geldt nu:

- a. Dit is een correcte polynomiale reductie van HAMILTOONS CIRCUIT naar ZSC.
- b. Dit is een correcte reductie van HAMILTOONS CIRCUIT naar ZSC, maar helaas niet polynomiaal.
- c. Dit zou een correcte polynomiale reductie van HAMILTOONS CIRCUIT zijn naar ZSC als $w(e) = -2$ voor alle kanten $e \in E$ die v niet als eindpunt hebben.
- d. Dit zou een correcte polynomiale reductie van HAMILTOONS CIRCUIT naar ZSC zijn, als $w(e) = n-2$ voor alle kanten $e \in E$ die v als een eindpunt hebben.

Antwoord Deze reductie is wel polynomiaal (zelfs lineair) maar niet correct.

Stel G heeft tenminste 3 knopen en is een yes-instantie van HAMILTOONS CIRCUIT.

Als $f(G)$ een simpele cycle heeft die v niet bevat, is het totaal gewicht van deze cycle altijd < 0 .

Als $f(G)$ een simpele cycle heeft die v wel bevat, dan geldt voor het totale gewicht van de cycle $w(c) \geq (n-2) \cdot -1 + 2 \cdot (n-1) = n > 0$. Het resultaat is, dat yes-instanties van HAMILTOONS CIRCUIT worden afgebeeld op no-instanties van ZSC.

Alternatief c . is niet correct: Stel G heeft een hamiltonse cycle. Dan zou $f(G)$ een simpele cycle c met totaalgewicht $w(c) = 0$ moeten bevatten. Dan moet c wel de knoop v bevatten. Maar dan zijn er twee kanten met totaal gewicht $2(n-1)$ in de cycle c . Er kunnen hoogstens $n-2$ additionele kanten aanwezig zijn met een gewicht -2 . Dit levert een totale som $w(c) \geq 2(n-1) - 2(n-2) > 0$: contradictie. Dus yes-instanties worden afgebeeld op no-instanties.

Alternatief d . is eveneens niet correct: Stel G heeft een hamiltonse cycle. Dan zou $f(G)$ een simpele cycle c met totaalgewicht $w(c) = 0$ moeten bevatten. Een cycle in $f(G)$ met som $w=0$ moet v wel bevatten. Maar dan zijn er twee kanten met een totaal gewicht $2(n-2)$ in de cycle. Er zijn hoogstens $n-2$ overige kanten met gewicht -1 in de cycle. Het totaal gewicht van zo'n cycle is derhalve altijd > 0 . Daarom:

- a. is onjuist.
- b. is onjuist.
- c. is onjuist.
- d. is onjuist.

OPEN VRAGEN I (30 PUNTEN)

Onderstaande vragen dient u kort te beantwoorden.

Een antwoord dient in hoogstens 5-7 regels gegeven te worden.

Vraag 11. Waarom is het volgende probleem een **NP-hard** probleem:

Gegeven een graaf $G = (V, E)$ en een positieve integer $K > 2$,
heeft G een simpel pad ter lengte van $|V|/K$?

Antwoord Neem de volgende polynomiale reductie f van HAMPAD naar dit probleem:

Gegeven een instantie $G = (V, E)$ van HAMPAD, construeer een instantie $f(G) = (V \cup V', E, K)$ waarbij V' met $|V'| = (K-1) \cdot |V|$ een nieuwe verzameling geïsoleerde knopen in $f(G)$ is en $K' = |V|$. Nu heeft G een hamiltoniaans pad dan en slechts dan als $f(G)$ een simpel pad ter lengte van $|V| + (K-1) \cdot |V| / K = (K \cdot |V|) / K = |V| = K$ bevat. Omdat $\text{HAMPAD} \in \text{NPC}$ moet bovenstaand probleem een **NP-hard** probleem zijn.

Vraag 12. **NL** is de klasse van problemen die oplosbaar zijn in niet-deterministisch polynomiale ruimte. Van deze klasse is bekend dat $L \subseteq \text{NL} \subseteq L^2$.
Laat zien dat $\text{NL} \subseteq P$.

Antwoord **Nb:** Er staat een fout in deze opgave: **NL** is de klasse van problemen oplosbaar in niet-deterministisch *logaritmische* ruimte. Bij de correctie zal hier rekening mee worden gehouden. Neem een willekeurige taal L in L^2 . Een machine M die L beslist, kan in hoogstens $2^{\log p(n)^2}$ verschillende configuraties verkeren voor een gegeven polynoom $p()$ en een invoer x met $|x|=n$. Aangezien $2^{\log p(|x|)^2} \leq q(x)$ voor een polynoom $q()$, is de tijd die M nodig heeft om x te beslissen polynomiaal begrensd. Dat betekent dat $L^2 \subseteq P$. Aangezien $\text{NL} \subseteq L^2$ geldt nu ook dat $\text{NL} \subseteq P$.

Vraag 13. Het probleem SAT-0.5 is het volgende probleem:

Gegeven een satisfiability instantie (U, C) , bestaat er een waarheidstoekenning $\tau : U \rightarrow \{0,1\}$ die minstens de helft van alle clauses in C waar maakt?

Laat zien dat dit probleem een **P**-probleem is.

Hint: Construeer een geschikte waarheidstoekenning τ . Hoe zou je $\tau(u)$ bepalen voor een $u \in U$ aan de hand van de verzameling $C_u \subseteq C$ van clauses waarin u of $\neg u$ voorkomt?

Antwoord Laat $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Dan is C op te delen in onderling disjuncte subsets $C_{u_i} \subseteq C$, bestaande uit alle clauses in C waarin (1) u_i of $\neg u_i$ voorkomt en (2) geen enkele literal afkomstig van $u_1, u_2, \dots$, of u_{i-1} voorkomt. Zo'n dergelijke opdeling is in $O(|U| \cdot |C|) = O(|I|^2)$ tijd te realiseren. Bepaal nu $\tau(u_i)$ voor iedere $u_i \in U$ als volgt: als u_i in minstens de helft van de clauses in C_{u_i} voorkomt dan $\tau(u_i) = 1$, anders $\tau(u_i) = 0$. Zo'n τ is eveneens in $O(|I|^2)$ tijd te construeren. Dan maakt τ minstens de helft van de clauses in iedere verzameling C_{u_i} waar. Dus maakt τ minstens de helft van alle clauses waar en wordt dit probleem in polynomiale tijd ($O(|I|^2)$) beslist.

Vraag 14. Gegeven is het volgende probleem:

Naam: CONSTRAINED TOUR

Instantie: Een verzameling S van n steden, een intercity afstandenmatrix $D = [d_{ij}]_{n \times n}$, een lijst $L \subseteq S \times S$ van verboden paren van steden, een gegeven stad $s \in S$ en twee positieve integers K en M .

Vraag: is er vanuit s een tour T langs tenminste K steden in S te maken met een totale afstand kleiner of gelijk aan M , waarbij voor elk tweetal verschillende steden s_i, s_j dat in de tour T voorkomt geldt: $(s_i, s_j) \notin L$ en $(s_j, s_i) \notin L$.

Geef zo kort mogelijk aan, waarom dit probleem een **NP-hard** probleem is.

Antwoord Voor $L = \emptyset$ en $K = n$ zijn de instanties van dit probleem precies gelijk aan TSP-instanties. Derhalve is $\text{TSP} \in \text{NPC}$ een *restrictie* van dit probleem en moet gelden dat dit probleem **NP-hard** is.

Vraag 15. Wat zijn de voornaamste gevolgen van quantum computing voor de complexiteit van problemen in **NP**?

Antwoord Shor heeft laten zien dat voor sommige problemen in **NP** (maar geen **NPC**-problemen) een *exponentiële* speed-up mogelijk is. Het algoritme van Grover en resultaten daarop gebaseerd hebben laten zien dat voor **NPC**-problemen hoogstens een *kwadratische* speed-up verwacht mag worden.

OPEN VRAGEN II (20 PUNTEN)

Beantwoord onderstaande vragen zo kort mogelijk. Geef geen irrelevante informatie, dit kan tot puntenaftrek aanleiding geven.

Vraag 16. (10 punten)

Het algemene SATISFIABILITY probleem wordt gedefinieerd als

$$\text{SAT} = \{ \varphi \mid \varphi \text{ is een vervulbare propositionele formule} \}$$

Je mag ervan uitgaan dat $\text{SAT} \in \text{NPC}$.

Iemand beweert nu het volgende:

1. Neem het probleem $\text{UNSAT} = \{ \varphi \mid \varphi \text{ is een onvervulbare propositionele formule} \}$. Dit probleem is een probleem in **coNPC**.
2. We construeren de volgende NDTM M voor UNSAT:
Voor input ϕ :
gok een waarheidstoekenning τ ;
if τ vervult de formule ϕ then output REJECT
else output ACCEPT.
3. M accepteert UNSAT; omdat M in polynomiale tijd opereert (verificatie van de vervulbaarheid van ϕ kost immers polynomiale tijd), geldt $\text{UNSAT} \in \text{NP}$.
4. Omdat (1) $\text{UNSAT} \in \text{NP} \cap \text{coNPC}$ en (2) $\text{NP} \cap \text{coNPC} \neq \emptyset$ impliceert **NP = coNP**, kunnen we concluderen dat **NP = co-NP**.

Geef precies aan (≤ 15 regels) waarom deze redenering onjuist is:

Antwoord.

De fout in de redenering schuilt in de bewering 3. dat de machine M de taal UNSAT accepteert. De machine accepteert naast alle onvervulbare formules ook vervulbare formules: als er immers ook maar één waarheidstoekenning bestaat waarvoor de NDTM de formule ϕ *niet* vervult, zal M de eindtoestand ACCEPT bereiken. Dit betekent echter niet dat ϕ onvervulbaar is: om dat te concluderen moeten *alle* waarheidstoekenningen τ de formule ϕ niet vervullen.

Omdat 3. niet juist is, is daarmee de conclusie in 4. getrokken ook onjuist en kunnen we niet concluderen dat **NP = coNP**.

Vraag 17. (10 punten)

Tijdens het college is een 2-approximatie algoritme behandeld voor het Euclidische TSP (ETSP) probleem. Hierbij werd gebruik gemaakt van een reductie van HAMCYCLE naar ETSP.

Laat zien, dat er geen polynomiaal c -approximatie algoritme voor ETSP kan bestaan met $c < 1 + 1/n$, tenzij **P = NP**, waarbij n het aantal steden in een ETSP instantie is (≤ 20 regels).

Antwoord.

Stel, zo'n approximatie-algoritme bestaat wel. Construeer dan de volgende reductie f van HAMCYCLE naar ETSP: Gegeven een graaf $G = (V, E)$, construeer een ETSP-instantie (S, D) met $S = V$ en $d_{ij} = 1$ als $\{v_i, v_j\} \in E$, $d_{ij} = 2$ anders. Deze instantie voldoet aan de driehoeksongelijkheid en is derhalve een ETSP-instantie. We onderscheiden twee gevallen:

1. G heeft een hamiltonse cycle. Dan is er een tour in $f(G)$ ter lengte van n .
2. G heeft geen hamiltonse cycle. Dan heeft iedere tour in $f(G)$ een lengte $\geq (n-1)+2 = n+1$.

In het eerste geval moet het approximatie algoritme een tour opleveren met lengte $\leq n(1+1/n) < n+1$, in het tweede geval, moet het approximatiealgoritme een tour opleveren $\geq n+1$.

Met behulp van het approximatiealgoritme kunnen we derhalve in polynomiale tijd HAMCYCLE beslissen. Dat is alleen mogelijk als **P = NP**.

EINDE TENTAMEN