

Tentamen TI3306 Complexiteitstheorie

5 juli 2017

9.00-12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 10 meerkeuzevragen, 5 korte (open) vragen en 2 open vragen.
- Voor de meerkeuzevragen kunt u maximaal 50 punten behalen, voor de korte open vragen maximaal 30 punten en voor de open vragen maximaal 20 punten.
- Het totaal aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) wordt als volgt bepaald:
 - o Per meerkeuzevraag i wordt het aantal foutief beantwoorde alternatieven f_i bepaald. Aangezien per vraag 0,1,2,3 of 4 alternatieven juist kunnen zijn geldt: $0 \leq f_i \leq 4$;
 - o Laat $f = \sum f_i$ voor alle 10 meerkeuzevragen ($0 \leq f \leq 40$) ; het aantal punten voor de meerkeuzevragen (mp) is dan $mp = 50 \times \max\{0, (40 - 1.5 \times f) / 40\}$.
- Het eindcijfer c wordt bepaald door de som te nemen van mp , het totaal aantal punten behaald voor de 5 korte vragen (kv) en de som van het aantal punten behaald voor de twee open vragen (ov) en vervolgens het resultaat te delen door 10: $c = (mp + kv + ov) / 10$; dit cijfer wordt vervolgens afgerond op het dichtstbijzijnde halve of gehele getal.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen, boek of andere bronnen is niet toegestaan.
- Het gebruik van grafische en niet-grafische rekenmachines is eveneens niet toegestaan.
- Beantwoord de meerkeuzevragen op het bijgeleverde antwoordformulier.
- Beantwoord de open vragen zo bondig mogelijk; geef geen irrelevante informatie, dit kan leiden tot puntenaftrek!
- Controleer of u op ieder blaadje uw naam en studienummer heeft vermeld en geef het totaal aantal ingeleverde bladen op (tenminste) de eerste pagina.

Notationele conventies:

- $A \leq B$ betekent dat er een polynomiale-tijdreductie van A naar B bestaat
- $A \leq_T B$ betekent dat er een polynomiale Turingreductie van A naar B bestaat.
- A^c is het complement van het probleem A .
- Er wordt steeds vanuit gegaan, dat $P \neq NP$ en $NP \neq coNP$, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel wordt vermeld.

MEERKEUZEVRAGEN (50 PUNTEN)

Vraag 1. Welke van de volgende uitspraken is/zijn juist:

- a. Als $A \in \mathbf{P}$, dan $A^c \in \mathbf{PSPACE}$.
- b. Als $A \in \mathbf{NP}$, dan $A \in \mathbf{P^{coNP}}$.
- c. Als $A \in \mathbf{EXP}$, dan $A \in \mathbf{NP} \cup \mathbf{coNP}$.
- d. Als $A \in \mathbf{BPP}$, dan $A \in \mathbf{PSPACE}$.

Antwoord

- a. juist, want $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{PSPACE}$ en $\mathbf{PSPACE}$ is gesloten onder complement.
- b. juist, want $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{P^{NP}}$ en $\mathbf{P^{NP}} = \mathbf{P^{co-NP}}$.
- c. onjuist, want $\mathbf{NP} \cup \mathbf{coNP} \subseteq \mathbf{EXP}$ en niet andersom.
- d. juist, want $\mathbf{BPP} \subseteq \mathbf{PP} \subseteq \mathbf{PSPACE}$.

Vraag 2. Het probleem om, gegeven een ongerichte graaf $G = (V, E)$ en een integer k , te bepalen of G

- a. een simpel pad bevat van lengte k , is een $\mathbf{NP}$ -volledig probleem.
- b. precies één simpel pad bevat van van lengte k , is een $\mathbf{coNP}$ -probleem.
- c. niet meer dan één simpel pad van lengte k bevat, is een $\mathbf{NP}$ -volledig probleem.
- d. tenminste twee simpele paden ter lengte van k bevat, is een $\mathbf{NP}$ -volledig probleem.

Antwoord

- a. juist, voor $k = |V|-1$ is dit probleem het Hamiltonean Pad probleem.
- b. onjuist, het is niet bekend hoe we in polynomiale tijd kunnen verifiëren dat er precies één pad bestaat ter lengte van k . Dit probleem ligt wel in $\mathbf{P^{NP}}$.
- c. onjuist, dit is een $\mathbf{coNP}$ -volledig probleem.
- d. juist.

Vraag 3. In welke onderstaande gevallen kunnen we voor twee problemen A en B concluderen dat $A \leq B$?

- a. als $A \in \mathbf{P}$ en $B \in \mathbf{NP}$.
- b. als $A \in \mathbf{NP}$ en B is een $\mathbf{PSPACE}$ -volledig probleem.
- c. als $A \in \mathbf{NPC}$ en B is een $\mathbf{NP-hard}$ probleem.
- d. als $A \in \mathbf{coNP}$ en $B \in \mathbf{NPC}$.

Antwoord

- a. onjuist (Neem bv. $B = \emptyset$, dit probleem ligt in $\mathbf{NP}$, maar kan niet als beeld van $\leq$ optreden voor een origineel $\neq \emptyset$).
- b. juist, ieder probleem in $\mathbf{PSPACE}$ is reduceerbaar naar B , dus ook A , want $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE}$.
- c. juist, want $X \leq B$ voor ieder $\mathbf{NP}$ -probleem X , dus ook voor $X=A$.
- d. onjuist: als $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$, dan geldt deze conclusie niet.

Vraag 4. Welke van de volgende inclusierelaties is juist?

- a. $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{EXP}$.
- b. $\mathbf{NL} \subseteq \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{PSPACE}$.
- c. $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{EXP}$.
- d. $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{L}^2$.

Antwoord

Er geldt (zie slides college 4b) : $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{L}^2 \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{EXP}$.

Hieruit volgt:

- a. is juist
- b. is onjuist
- c. is juist
- d. is juist.

Vraag 5. Welke van de volgende uitspraken is waar?

- a. $3SAT \leq VERTEXCOVER$.
- b. $VERTEXCOVER \leq HAMPAD$.
- c. $X \leq SUBSETSUM$ voor elk **NP**-probleem X .
- d. $CLIQUE \leq Y$ voor elk **PSPACE** probleem Y .

Antwoord

- a. juist, beide zijn **NP**C problemen.
- b. juist, beide zijn **NP**C problemen.
- c. juist, per definitie, want SUBSUM is een NPC probleem.
- d. onjuist, want CLIQUE is een NPC probleem en **PSPACE** bevat ook **P**-problemen.

Vraag 6. Gegeven zijn de beslissingsproblemen A, B en C met $C \leq B \leq A$. Het is bekend dat B een **NP**-hard probleem is. Onder welke condities is het zeker dat B een **NP**C-probleem is?

- a. als C een **NP**C-probleem is.
- b. als A een **NP**C-probleem is.
- c. als C een **NP**-probleem is.
- d. als A een **NP**-probleem is.

Antwoord

- a. onjuist.
- b. juist
- c. onjuist
- d. juist

Vraag 7. Wat is de complexiteit van het volgende probleem:

Naam: BIJNACLIQUE

Instantie: Graaf $G = (V, E)$

Vraag: Heeft G een clique ter grootte van $|V|-1$?

- a. Dit is een probleem in **P**.
- b. Dit is een probleem in **NP**C.
- c. Dit is een probleem in **coNP**C.
- d. Dit is een probleem in **NP - P**.

Antwoord

- a. juist, want er zijn $|V|$ mogelijke deelverzamelingen van V ter grootte van $|V|-1$ te onderzoeken of zij een volledige (deel)graaf vormen. Deze laatste test is polynomiaal. Het probleem is derhalve in polynomiale tijd te beslissen.
- b. onjuist, zie a. en we nemen aan dat $P \neq NP$.
- c. onjuist: zie b.
- d. onjuist, zie a. en b.

Vraag 8. Neem het volgende probleem:

Instantie: Graaf $G = (V, E)$ en positieve integers k en l .

Vraag: Bestaat er een subset V' van k knopen uit V zodanig dat voor elke kant $e = (v, w) \in E$ geldt dat

- $v \in V'$ en/of $w \in V'$

of

- er bestaat een simpel pad π in G ter lengte van hoogstens l naar een knoop $v' \in V'$ zodanig dat e voorkomt in π .

Welke van de volgende **NP**-volledige problemen is/zijn een restrictie van bovenstaand probleem?

- a. HAMPAD.
- b. VERTEXCOVER.
- c. PARTITION.
- d. CLIQUE.

Antwoord:

Alleen b. is juist: neem maar $l = 1$; in dit geval heeft elke kant e (i.e. pad ter lengte van 1) een eindpunt in V' . Derhalve is V' een vertex cover van G . Alle andere genoemde problemen zijn geen restrictie van het bovenstaande probleem.

Vraag 9. Van twee **NPO**-problemen A en B is bekend dat iedere A-instantie tevens een B-instantie is. Voor B bestaat een polynomiaal 1.5-benaderingsalgoritme. Er geldt dan dat

- a. A een **APX**-probleem is.
- b. A een polynomiaal c -benaderingsalgoritme heeft voor een constante $c \leq 1.5$.
- c. A een probleem is in **NPO-APX**.
- d. A geen polynomiaal c -benaderingsalgoritme kan hebben voor een constante $c \leq 1.5$.

Antwoord

- a. is juist: omdat A een restrictie is van B, is het benaderingsalgoritme voor B ook een benaderingsalgoritme voor A en $A \in \text{APX}$.
- b. is juist, er zou eventueel een beter approximatie algoritme dan het 1.5 benaderingsalgoritme voor A kunnen bestaan.
- c. onjuist, zie a.
- d. onjuist, zie b.

Vraag 10. Het door Sipser besproken *amplification lemma* komt er op neer dat $\mathbf{BPP} = \mathbf{BPP}_\delta$ voor elke δ met $0 < \delta < 0.5$

Hierbij is $\mathbf{BPP}_\delta$ de klasse van alle talen L waarvoor er een polynomiale probabilistische Turing machine M bestaat met de eigenschap dat

- (i) $\Pr(M \text{ accepteert } w \mid w \in L) \geq 0.5 + \delta$
- (ii) $\Pr(M \text{ verworpt } w \mid w \notin L) \geq 0.5 + \delta$.

Er geldt nu het volgende:

- a. Voor $\delta = 0.5$ is $\mathbf{BPP}_\delta$ gelijk aan **P**.
- b. Voor elke δ met $0 < \delta < 0.5$ geldt $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{BPP}_\delta \subseteq \mathbf{NP}$.
- c. $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{BPP}$.
- d. Voor elke δ met $0 < \delta < 0.5$ geldt $\mathbf{BPP}_\delta = \mathbf{NPC}$.

Antwoord

- a. is juist: de kans op verwerpen van $w \notin L$ en accepteren $w \in L$ zijn beide gelijk aan 1.
- b. is onjuist, het is niet bekend of $\mathbf{BPP} \subseteq \mathbf{NP}$ dan wel $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{BPP}$.
- c. is juist.
- d. is onjuist: zie b. en de veronderstelling dat $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

OPEN VRAGEN I (30 PUNTEN)

**Onderstaande vragen dient u kort te beantwoorden.
Een antwoord dient in hoogstens 5-7 regels gegeven te worden.**

Vraag 11. Stel, dat $L^2 \subseteq P$. Laat zien, dat hieruit volgt dat $L \neq P$.

Antwoord We weten dat $L \subseteq L^2$. Uit de Ruimtehiërarchie stelling volgt onmiddellijk, dat er een taal $L \in L^2$ bestaat zodanig dat $L \notin L$. Derhalve geldt $L \in L^2$. Maar dan volgt onmiddellijk dat $L \neq P$.

Vraag 12. Hoe kun je laten zien dat het volgende probleem

Naam: KWARTVERTEXCOVER

Instantie: Graaf $G = (V, E)$

Vraag: Heeft G een vertex cover ter grootte van $|V|/4$?

een **NP-hard** probleem is?

Antwoord Het probleem VERTEXCOVER is een **NP** probleem. Gegeven een instantie $(G = (V, E), k)$ van vertex cover, waarbij $k \leq |V| = n$, construeer een instantie $G' = (V', E')$ van HALVEVERTEXCOVER waarbij

$V' = V \cup \{v_i' \mid i=1,2, \dots, n-k\} \cup \{v_i'' \mid i=1,2, \dots, n-k\} \cup \{v_i''' \mid i=1, 2, \dots, n+2k\}$,

$E' = E \cup \{\{v_i', v_i''\} : i=1, \dots, n-k\}$

Dan heeft G' een vertex cover ter grootte van $n = n-k + k$ alss G een vertex cover heeft ter grootte van k , terwijl $|V'| = n+2n-2k + (n+2k) = 4n$.

Dus G' heeft een vertex cover ter grootte van $|V'|/4$ als G een vertex cover heeft ter grootte van K . Derhalve geldt: VERTEXCOVER $\leq$ KWARTVERTEXCOVER.

Vraag 13. Geef precies aan, waarom nooit kan gelden dat **EXP** $\subseteq$ **NP**.

Antwoord er geldt $P \subseteq NP \subseteq EXP$ en $NP \subsetneq EXP$ (want $\emptyset$ en Σ^* kunnen niet voorkomen in **NP**). Daarmee geldt $NP \subsetneq EXP$. Dit sluit bovenstaande inclusierelatie uit.

Vraag 14. Laat L en M twee talen zijn over een alfabet Σ .

Laat zien dat de volgende bewering onwaar is: *als $L \subseteq M$ dan geldt $L \leq M$.*

Antwoord Neem $L \neq \Sigma^*$ een willekeurige taal en $M = \Sigma^*$. M kan niet als beeld van een polynomiale reductie optreden als het origineel nee-instanties bevat (i.e. als $L \neq \Sigma^*$).

Dus er kan niet gelden $L \leq M$, terwijl $L \subseteq M$.

Vraag 14. Waarom is het niet juist te stellen dat met quantum computing aangetoond is dat **NP**-problemen in polynomiale tijd kunnen worden opgelost.

Antwoord Alhoewel er voor sommige problemen in NP polynomiale quantum algoritmen zijn gevonden zoals het factorisatieprobleem, is er voor geen enkel **NP** probleem een polynomiaal quantum algoritme gevonden. Bovendien geldt dat er geen polynomiaal quantum (uitputtend) zoekalgoritme voor NP-problemen kan bestaan (zie Grover, Bennett & Brassard). De sterke $P \neq NP$ these geldt derhalve ook voor quantum computing.

OPEN VRAGEN II (20 PUNTEN)

Beantwoord onderstaande vragen zo kort mogelijk. Geef geen irrelevante informatie, dit kan tot puntenaftrek aanleiding geven.

Vraag 16. (15 punten)

Clique-detectie in sociale netwerken is een belangrijk probleem. Een speciaal probleem dat hierbij een rol speelt is het bepalen van het *minimale aantal* cliques waarin een gegeven netwerk (graaf) kan worden opgedeeld. In dit verband definiëren we het volgende probleem:

Naam: CLIQUE OVERDEKKING

Input: Een graaf $G = (V, E)$ en een positieve integer k .

Vraag: Kan G overdekt worden met hoogstens k cliques, dwz. zijn er ten hoogste k subgrafen van G te vinden die tevens cliques zijn, zodat iedere knoop v uit V in minstens één van deze cliques voorkomt?

Iemand beweert dat heel eenvoudig kan worden aangetoond dat dit probleem een **NP**-volledig probleem is. Zijn redenering luidt als volgt:

Neem een CLIQUE-instantie $\langle G = (V, E), k \rangle$ en beschouw de volgende reductie naar een CLIQUE COVER instantie $\langle G', k' \rangle$: laat $G' = G$ en $k' = |V| - k + 1$. Deze reductie is polynomiaal en toont aan dat $\text{CLIQUE} \leq \text{CLIQUE COVER}$.

- a. Toon aan, dat deze reductie niet correct is door het geven van een tegenvoorbeeld.

Antwoord:

Tegenvoorbeeld: Neem twee volledige grafen G_1 met 4 knopen en G_2 met 2 knopen die onderling geen kanten gemeen hebben. Laat de graaf G bestaan uit G_1 en G_2 . G heeft geen clique ter grootte van 5. G heeft echter wel een clique cover ter grootte van $6 - 5 + 1 = 2$: neem G_1 en G_2 .

- b. Laat zien dat dit probleem een **NP-hard** probleem is met een polynomiale reductie van het GRAPH-k-COLOR probleem (Gegeven een graaf $G = (V, E)$ en een integer k is de graaf k -kleurbaar, dwz er bestaat er een functie $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ met $f(u) \neq f(v)$ als $\{u, v\} \in E$).

Antwoord:

Constructie reductie:

Neem instantie $\langle G = (V, E), k \rangle$ van GRAPH-k-COLOR.

Beschouw de complementaire graaf $G' = (V, E^c)$ en laat $k' = k$.

Correctheid:

$\langle G', k' \rangle$ heeft een clique cover ter grootte van k' desda $\langle G, k \rangle$ heeft een k -coloring:

Stel $\langle G = (V, E), k \rangle$ is yes-instantie van GRAPH-k-COLOR. Dan bestaat er een k -coloring f van G . Voor $j = 1, \dots, k$, laat $V_j = \{v \in V \mid f(v) = j\}$. Nu geldt V_j is een clique in G' : immers $v, v' \in V_j$ impliceert $f(v) = f(v')$ en derhalve $\{u, v\} \notin E$ dus $\{u, v\} \in E^c$. Derhalve kan G' gecovered worden met k verschillende cliques.

Omgekeerd, laat $\langle G', k' \rangle$ een clique cover ter grootte van k' hebben. Dan bestaan er k disjuncte (!) cliques $V_1, \dots, V_k$ die G' overdekken. Construeer nu een coloring f met $f(v) = j$ als $v \in V_j$. f is een valide coloring: Stel $f(u) = f(v)$ dan geldt $u, v \in V_i$ voor een $1 \leq i \leq k$, maar dan geldt $\{u, v\} \in E^c$, dus $\{u, v\} \notin E$.

Polynomialiteit:

De reductie kan in $O(|I|)$ tijd uitgevoerd worden en is derhalve polynomiaal.

Vraag 17. (10 punten)

Neem het volgende probleem

Naam: SELECTIONOFPAIRS

Instantie: n paren van positieve getallen (x_i, y_i) , met $x_i \leq y_i$ en een positief getal t .

Vraag: Bestaat er een subset I van de gegeven paren (x_i, y_i) waarvoor geldt dat $\sum_{i \in I} x_i \leq t \leq \sum_{i \in I} y_i$.

- Laat zien dat dit probleem een **NP**-hard probleem is (≤ 5 regels).
- Laat zien dat het bovenstaande probleem ook **NP**-hard is als in de voorwaarden alle ongelijkheden in de probleemformulering worden vervangen door strikte ongelijkheden, i.e. $\sum_{i \in I} x_i \leq t \leq \sum_{i \in I} y_i$ wordt $\sum_{i \in I} x_i < t < \sum_{i \in I} y_i$.

Antwoord:

- SUBSUM instanties zijn speciale instanties van SELECTIONOFPAIRS, waarbij voor alle paren (x_i, y_i) geldt $x_i = y_i$. SUBSUM is derhalve een restrictie van SELECTIONOFPAIRS. Daarmee is dit laatste probleem een NP-hard probleem.
- Neem een SUBSUM instantie (S, t) . Creeer als volgt een instantie van SELECTIONOFPAIRS: voor elke $s_i \in S$ maken we een paar $(s_i, s_i + 2)$ en we nemen $t+1$ als doelinteger. Nu geldt: (S, t) heeft oplossing desda er bestaat een subset S' van S die sommeert tot t desda de overeenkomstige geselecteerde paren $(s_i, s_i + 2)$ voldoen aan de eis $\sum_{i \in I} s_i < t+1 < \sum_{i \in I} (s_i + 2)$.

EINDE TENTAMEN