Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, 2628 CD DELFT

TU Delft

tentamen Analyse (deel 1) – wi 1 005 In
28 oktober 2009, 09.00–11.00 uur

Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.

Alleen het **formuleblad** *van het* instellingspakket *mag worden gebruikt. Gebruik van rekenmachines, boeken en aantekeningen, en onderling contact zijn* ***niet*** *toegestaan.*

Per vraag is precies één antwoord correct. Geef dat aan op het antwoordformulier.
Zet daarop ook versie, naam en studienummer (vul ook de betreffende vakjes in).

De twee resterende vragen beantwoord je op het aparte vel, en dat lever je ook in; voorzie je antwoorden daarop van een korte argumentatie.

1. $\sin(\arctan(x^2)) =$

A. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$

B. $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ **D.** $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}$

> Teken een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden ter lengte 1 en x^2; de hypothenusa heeft dan als lengte $\sqrt{1+x^4}$. Nu is $\vartheta = \arctan(x^2)$ de hoek tegenover de zijde met lengte x^2 en $\sin(\arctan(x^2)) = \sin\vartheta = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}$. § 1.6

2. De afgeleide van $\sqrt{\sin^2 x}$ naar x als $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ is

A. $\cos x$ C. $\dfrac{2\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}$

B. $-\cos x$ D. $\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\sin^2 x}}$

> De kettingregel geeft: $\left(\sqrt{\sin^2 x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x}} \cdot 2\sin x\,\cos x = \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} \cdot \cos x \overset{\sin x<0}{=} -\cos x$.
>
> [of:] $\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \overset{\sin x<0}{=} -\sin x \Longrightarrow \left(\sqrt{\sin^2 x}\right)' = -\cos x$. § 3.4

3. De afgeleide van $(1+x^2)\arctan x$ naar x is na vereenvoudiging

A. $\dfrac{2x}{1+x^2}$ C. $\dfrac{1+2x}{1+x^2}$

B. $\dfrac{2x}{\sin^2 x}$ **D.** $1 + 2x\,\arctan x$

> Productregel: $\left((1+x^2)\arctan x\right)' = (1+x^2)\frac{1}{1+x^2} + 2x\,\arctan x = 1 + 2x\,\arctan x$. § 3.5

4. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\,\ln(x)} =$$

A. $\ln(\ln|x|)$

B. $\dfrac{-2}{(\ln(x))^2}$

C. $\ln|\ln x|$

D. $\frac{1}{2}\,(\ln(x))^2$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\,\ln(x)} \overset{u=\ln x}{=} \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C\,.$ § 5.5

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\cos x\,\mathrm{d}x =$$

A. $\frac{\pi}{2} + 1$

B. $\frac{\pi}{2} - 1$

C. $-\frac{\pi}{2} - 1$

D. $\frac{\pi^2}{8}$

$\int x\,\cos x\,\mathrm{d}x \overset{\text{P.I.}}{=} x\cdot\sin x - \int 1\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C \Longrightarrow$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\cos x\,\mathrm{d}x = [x\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1\,.$ § 7.1

6. Beschouw de integraal $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.

Beantwoord de volgende vragen:

vraag 1 : is deze integraal oneigenlijk?

vraag 2 : is deze integraal convergent?

De juiste antwoorden op deze vragen zijn respectievelijk:

A. ja / ja

B. ja / nee

C. nee / ja

D. nee / nee

De integraal is oneigenlijk in 0, daar de integrand in 0 onbegrensd is.
De integraal is een p-integraal met $p = \frac{1}{2} < 1$ en is derhalve convergent. § 7.8

7. $$\int_{-1}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x =$$

A. 1

B. -1

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

Omdat $\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{u=x^2+1}{=} \int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x^2+1} + C$ is
$\int_{-1}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_{-1}^{\infty} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$
[of:] Omdat de integrand oneven is volstaat berekening van $\int_1^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$ § 7.8

8. Om aan te tonen dat $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,|\ln x|}\,\mathrm{d}x$ *divergent* is volgen vier argumenten:

1. $\frac{1}{\sqrt{x}\,|\ln x|} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ voor $0 \le x \le \frac{1}{\mathrm{e}}$;

2. $\frac{1}{\sqrt{x}\,|\ln x|} > \frac{1}{x\,\ln x} - 1 > 0$ voor $\frac{1}{\mathrm{e}} \le x < 1$;

3. $\int_{1/\mathrm{e}}^{1} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x$ is divergent;

4. $\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ is convergent.

De beweringen zijn op zichzelf genomen waar, en gezamenlijk volstaan zij om het gevraagde aan te tonen. Stel dat je geen andere argumenten mag gebruiken.

Welke argumenten heb je *ten minste* nodig om divergentie aan te tonen?

A. 1 en 3

B. 1 en 4

$\boxed{\text{C.}}$ 2 en 3

D. 2 en 4

De integraal is oneigenlijk in 0 ($\sqrt{x}$) en in 1 ($\ln x$) en moet in tweeën worden gesplitst.
De term met de oneigenlijkheid in 0 is convergent (*ga na*).
Op $[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1)$ geldt: $\frac{1}{\sqrt{x}\,|\ln x|} > \frac{1}{x\,\ln x} - 1 > 0$, en $\int_{1/\mathrm{e}}^{1} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x$ is divergent. Het majorante-minorantekenmerk zegt dat $\displaystyle\int_{1/\mathrm{e}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\,|\ln x|}\,\mathrm{d}x$ divergent is, en dus ook $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,|\ln x|}\,\mathrm{d}x$.

N.B. het eerste argument is bij nader inzien onjuist. Het feit dat op $(0, \frac{1}{\mathrm{e}})$ zou gelden dat $\frac{1}{\sqrt{x}\,|\ln x|} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ houdt alleen maar in dat de integrand groter is dan een die tot een convergente integraal leidt, en daaraan valt geen conclusie te verbinden.

N.B. er zat nog een fout in het vraagstuk: $\frac{1}{\sqrt{x}\,|\ln x|} > \frac{1}{x\,\ln x} - 1 > 0$ is niet juist, maar wel $\frac{1}{\sqrt{x}\,|\ln x|} > -\frac{1}{x\,\ln x} - 1 > 0$, echter niet op $[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1)$, maar wel op bijvoorbeeld $[\frac{1}{2}, 1)$

Opmerking: nader onderzoek levert op dat $\frac{1}{\sqrt{x}\,|\ln x|} \to -\frac{1}{x\,\ln x} - \frac{1}{2}$ als $x \to 1^-$ § 7.8

9. Welke betrekking beschrijft de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x\,(2 - \frac{1}{\ln y})\,y' = y\,?$$

$\boxed{\text{A.}}$ $\frac{y^2}{\ln y} = C\,x$

B. $\ln(y^2 - \ln y) = C\,\ln x$

C. $2y + y\,(\ln y - 1) = \ln x + C$

D. $x^2\,(1 - \frac{1}{2}\,y\,(\ln y - 1)) = \frac{1}{2}\,y^2 + C$

10. De differentiaalvergelijking $x^2\,y' - xy = \frac{1}{x}$ is

A. wel separabel en wel lineair

$\boxed{\text{B.}}$ niet separabel en wel lineair

C. wel separabel en niet lineair

D. niet separabel en niet lineair

11. $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi + i} =$

A. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

$\boxed{\text{B.}}$ $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi}\,(\cos 1 + i \sin 1)$

C. $\cos(\frac{1}{4}\pi + 1) + i \sin(\frac{1}{4}\pi + 1)$

D. $\mathrm{e}^{\pi}\,(\cos \frac{1}{4} + i \sin \frac{1}{4})$

Rechtstreeks uit de definitie (met $z = \frac{1}{4}\pi + i$ is $\mathrm{Re}\,z = \frac{1}{4}\pi$ en $\mathrm{Im}\,z = 1$):
$\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi + i} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi}\,(\cos 1 + i \sin 1)$. App. H

12. Als $z = -\sqrt{7} + i\sqrt{21}$ en $w = -3 - 3i$ zijn, is $\arg(zw)$ gelijk aan

A. $\frac{7}{12}\pi$
B. $\frac{11}{12}\pi$
C. $\frac{19}{12}\pi$
D. $\frac{23}{12}\pi$

13. Geef de oplossing van het volgende beginwaardeprobleem:

$$y'' + 6y' + 9y = 0\,, \quad y(1) = 0\,,\ y'(0) = 1\,.$$

A. $\frac{1}{2}(x-1)e^{3x}$
B. $\frac{1}{3}(x-1)e^{-3x}$
C. $\frac{1}{4}(x-1)e^{-3x}$
D. $\frac{1}{9}\sin(3x)$

De karakteristieke vergelijking luidt $r^2 + 6r + 9 = 0 \Longrightarrow r = -3$ (dubbel nulpunt).
De algemene oplossing luidt derhalve $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2\, x e^{-3x}$.
Invullen van $x = 1$ leidt tot $C_1 e^{-3} + C_2 e^{-3} = 0 \Longrightarrow C_2 = -C_1$ en van $x = 0$ in $y'(x) = -3\,C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-3x} - 3\,C_2\, x e^{-3x}$ tot $-3\,C_1 + C_2 = 1 \Longrightarrow C_1 = -\frac{1}{4}$ en $C_2 = \frac{1}{4}$.
De oplossing wordt $y(x) = -\frac{1}{4}e^{-3x} + \frac{1}{4}xe^{-3x} = \frac{1}{4}(x-1)e^{-3x}$.
Pas na het 091028-tentamen bleek het juiste alternatief niet voor te komen. Hierboven staat de gecorrigeerde versie. § 17.1

14. Welke van de volgende functies is een *particuliere* oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' + 2y' + 2y = 3\cos x$?

A. $3\cos x$
B. $\frac{3}{5}(\cos x + 2\sin x)$
C. $e^{-x}\left(\frac{1}{9}\cos x - \frac{1}{9}\sin x\right)$
D. $e^{-x}\left(\frac{3}{5}\cos x + \frac{6}{5}\sin x\right)$

Hierbij, in groepjes van 5, de juiste antwoorden:

DBDCA ACCAB BDCB

15. Als $\tan(xy) = \frac{\pi y}{x}$ en bekend is dat $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$, bereken dan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\frac{\pi}{2})$.

We vatten (in een omgeving van punt $P = (\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$) y op als functie van x; impliciet differentiëren van de vergelijking en invullen van P leveren:

$\frac{1}{\cos^2(xy)} \cdot (y + xy') = -\frac{\pi y}{x^2} + \frac{\pi y'}{x} \stackrel{x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{1}{2}}{\Longrightarrow} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} y') = -\frac{\pi \frac{1}{2}}{(\frac{\pi}{2})^2} + \frac{\pi y'}{\frac{\pi}{2}} \Longleftrightarrow 1 + \pi y' = -\frac{2}{\pi} + 2y' \Longrightarrow y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1+\frac{2}{\pi}}{2-\pi} = \frac{\pi+2}{2\pi-\pi^2}$.

Opmerking: P voldoet aan de gegeven betrekking. § 3.5

16. Geef de algemene oplossing van $2y'' - 6y' + 9y = 6x + \frac{1}{2}$.

De differentiaalvergelijking is lineair en van de tweede-orde; de coëfficiënten zijn constant. We lossen eerst de gereduceerde (homogene) vergelijking op. De karakteristieke vergelijking wordt:

$2\,r^2 - 6\,r + 9 = 0 \Longleftrightarrow r = \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\,i \Longrightarrow y_{\mathrm{r}}(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}\cos(\frac{3}{2}x) + C_2\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}\sin(\frac{3}{2}x)$.

Het rechterlid is „speciaal": een eerstegraads veelterm, vermenigvuldigd met een exponentiele functie (met exponent 0) en een goniometrische functie (met hoekfrequentie 0). We zoeken een particuliere oplossing $y_{\mathrm{p}}(x)$ van de vorm

$y_{\mathrm{p}}(x) = a\,x + b \Longrightarrow y_{\mathrm{p}}'(x) = a \Longrightarrow y_{\mathrm{p}}''(x) = 0$; invullen levert de voorwaarde

$0 - 6\,a + 9\,(ax + b) = 6x + \frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{2}{3}$ en $b = \frac{1}{2}$. De gevraagde oplossing is

$y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + y_{\mathrm{r}}(x) = \frac{2}{3}\,x + \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}\left(C_1\cos(\frac{3}{2}x) + C_2\sin(\frac{3}{2}x)\right)$. § 17.2